T.C.
AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HARMONİK ANALİZDE LEBESGUE UZAYLARI VE İNTEGRAL OPERATÖRLERİ

Süleyman ÇELİK

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

KIRŞEHİR 2016

T.C.
AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HARMONİK ANALİZDE LEBESGUE UZAYLARI VE İNTEGRAL OPERATÖRLERİ

Süleyman ÇELİK

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

I. DANIŞMAN: Doç. Dr. Ali AKBULUT

II. DANIŞMAN: Doç. Dr. Necip ŞİMŞEK

KIRŞEHİR 2016

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü'ne

Bu çalışma jürimiz tarafından MATEMATİK Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Başkan

Prof. Dr. Ayhan ŞERBETÇİ

Üye

Prof. Dr. Levent KULA

Üye

Doç. Dr. Ali AKBULUT

Onay

Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

.../.../2016

Prof. Dr. Levent KULA

Enstitü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Yüksek Lisans tezi olarak sunduğum "Harmonik Analizde Lebesgue Uzayları ve İntegral Operatörleri" başlıklı çalışmamın akademik kurallara ve etik değerlere uygun olarak yazıldığını, yararlandığım eserlerin kaynaklarda eksiksiz olarak gösterildiğini ve çalışmamın içinde kullanıldıkları her yerde bunlara atıf yapıldığını bildiririm.

Süleyman ÇELİK

ÖZET

Harmonik Analizde Lebesgue Uzayları ve İntegral Operatörleri

Yüksek Lisans Tezi

SÜLEYMAN ÇELİK

Ahi Evran Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Temmuz 2016

Bu yüksek lisans tezinde harmonik analizde Lebesgue uzaylarının özellikleri ve bu uzaylarda klasik integral operatörlerinin sınırlılıkları hakkında bilgi verilecektir. Bu tez çalışması dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm giriş kısmıdır.

İkinci bölümde, tez konusu ile ilgili bazı temel kavram, notasyon ve teoremlere yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde, Lebesgue uzaylarının özellikleri ile ilgili tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

Son bölümde Hardy-Littlewood maksimal operatörü, Riesz potansiyel operatörü, singüler integral operatörlerinin $L^p(\mathbb{R}^n)$ uzayında sınırlılıkları ile ilgili sonuçlara yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler : $L^p(\mathbb{R}^n)$ uzayları, Hardy-Littlewood maksimal operatörü, Riesz potansiyel operatörü, singüler integral operatörleri

Tez Yöneticileri : Doç. Dr. Ali AKBULUT,
Doç. Dr. Necip ŞİMŞEK

Sayfa Adedi : **79**

ABSTRACT

LEBESGUE SPACES AND INTEGRAL OPERATORS IN HARMONIC ANALYSIS

Master of Science Thesis

SÜLEYMAN ÇELİK

Ahi Evran University
Institute of Science
July 2016

In this graduate thesis, informatin about features of Lebesgue spaces and boundedness of classic integral operators will be given. This thesis study consists of four chapters.

First chapter is introduction part.

In the second chapter, some basic concepts, notations and theorems about thesis are given.

In the third chapter, definition and theorems about features of Lebesgue spaces are given.

In the last chapter, results about the boundedness of Hardy-Littlewood maximal operator, Riesz potential operators and Singuler integral operators in $L^p(\mathbb{R}^n)$ spaces are given.

Keywords	:	$L^p(\mathbb{R}^n)$ spaces, Hardy-Littlewood maximal operator, Riesz potential operators, Singuler integral operators
Advisor of Thesis	:	Assoc. Prof. Dr. Ali AKBULUT, Assoc. Prof. Dr. Necip ŞİMŞEK
Number of Pages	:	**79**

TEŞEKKÜR

Bu yüksek lisans tezini hazırlarken, her ihtiyaç duyduğumda değerli ve derin bilgileriyle bana ışık tutan, yardımlarını esirgemeyen, beni tüm içtenliği ve samimiyetiyle destekleyen, bana emek veren saygı değer hocalarım ve tez danışmanlarım Doç. Dr. Ali AKBULUT ve Doç. Dr. Necip ŞİMŞEK'e teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca bana destek veren kıymetli hocalarım Prof. Dr. Vatan KARAKAYA'ya, Prof. Dr. Vagif S. GULİYEV'e de teşekkür ederim.

Yine tez çalışmamda emeği geçen Dr. Fatih DERİNGÖZ'e, İlkay BİLGİN'e ve Kemal KURT'a, tez çalışması boyunca zaman ayıramadığım ihmal ettiğim sevgili eşim Yrd. Doç. Dr. Fatma ÇELİK'e, çocuklarım Zahid Talha ÇELİK'e ve Elif İrem ÇELİK'e teşekkürlerimi sunarım.

Süleyman ÇELİK

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

SİMGELER VE KISALTMALAR

$\mathbb{R}^n$	: $n-$ boyutlu Reel uzay
Ω	: $\mathbb{R}^n$ de açık küme
$\lvert x\rvert = (\sum\limits_{j=1}^{n} x_j^2)^{\frac{1}{2}}$	: x vektörünün mutlak değeri
$L^p(\mathbb{R}^n)$	: Lebesgue uzayı
$WL^p(\mathbb{R}^n)$	: Zayıf Lebesgue uzayı
$\lVert f\rVert_{L^p}$	: $L^p(\mathbb{R}^n)$ normu
$\lvert B(x,r)\rvert$	: x merkezli r yarıçaplı yuvarın Lebesgue ölçüsü
$Q(x,r)$	: x merkezli r yarıçaplı küp
Mf	: Hardy-Littlewood maximal fonksiyonu
$I_\alpha f$	: Riesz Potansiyeli
$T_\Omega f$	: Singüler integral operatörü

1 GİRİŞ

Fonksiyon uzaylarının modern teorisi S.L. Sobolev, A. Zygmund, S.M. Nikolskii, A. Calderon, V. Mazya, L.D. Kudryavtsev, N. Aronszayn, E.M. Stein, O.V. Besov, P.I. Lizorkin, H. Triebel, V.I. Burenkov gibi dünyaca ünlü matematikçiler tarafından incelenmiştir. Bu teori reel ve fonksiyonel analizin birçok konusuna ve diğer matematiksel disiplinler içinde kısmi diferensiyel denklemler ve matematiksel fizik gibi bir çok alanlara başarıyla uygulanmıştır. $L^p(\mathbb{R}^n)$ Lebesgue uzayları 1958 yılında Fransız matematikçi H. Lebesgue'in (**Dunford ve Schwartz 1958**) adıyla matematik dünyasında yer almıştır. Banach uzayıları ve topolojik vektör uzaylarının önemli bir sınıfını $L^p(\mathbb{R}^n)$ uzayları oluşturur. Lebesgue uzaylarının, harmonik analizin problemlerinin çözülmesinde olduğu gibi kısmi türevli denklemler teorisi ile fizik, istatistik, finans, mühendislik ve ayrıca diğer disiplinlerde bir çok uygulamaları vardır.

İntegral ve diferensiyel operatörlerin farklı norm eşitsizlikleri fonksiyon uzaylarının teorisinde ve onların uygulamalarında esaslı öneme sahiptir. Özellikle diferensiyellenebilir fonksiyonların klasik uzayları teorisi (Sobolev uzayları, Besov uzayları, ağırlıklı Besov tipi uzaylar, vb.) bu eşitsizlikler üzerine esaslı olarak inşa edilirler. Yakın zamanlarda integral ve diferensiyel operatörler için norm eşitsizlikleri ile ilgili birçok zor problemler çözülmüştür. Bu sonuçlar fonksiyonel analizin özellikle geniş olarak lineer ve lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlere uygulamaları için temel araçlar olmuştur.

Harmonik analizin klasik operatörleri olan maksimal fonksiyon, Riesz potansiyeli ve singüler integral operatörleri de Fourier dönüşümü teorisinde, kısmi türevli denklemler teorisinde, olasılık teorisinde (Markov süreçleri için potansiyel fonksiyonlar ve durağan rasgele süreçlerin spektral yoğunluk fonksiyonları çalışmalarında), fonksiyonel analizde özel olarak operatörlerin interpolasyonu torisinde geniş uygulamalara sahiptir. Calderon-Zygmund singüler integral operatörü Hilbert ve Riesz dönüşümlerinin genelleştirmesidir. Birincisi üst yarı düzlem üzerindeki eşlenik harmonik fonksiyonların sınır değer araştırmalarında ortaya çıkmıştır, diğeri ikinci dereceden eliptik denklem çözümünün regülerliğine karşılık gelmektedir.

Bu tez çalışması dört bölümden oluşmaktadır. İkinci bölümde, tez konusu ile ilgili bazı temel kavram, notasyon ve teoremlere yer verilmiştir. Üçüncü bölümde, Lebesgue uzaylarının özellikleri ile ilgili tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Son bölümde Hardy-Littlewood maksimal operatörü, Riesz potansiyel operatörü ve singüler integral operatörlerinin $L^p(\mathbb{R}^n)$ uzayında sınırlılıkları ile ilgili sonuçlara yer verilmiştir.

2 TEMEL KAVRAMLAR VE TEOREMLER

2.1 Metrik Uzaylar

Tanım 2.1.1 $X \neq \emptyset$ bir küme ve X kümesi üzerinde tanımlı $\mathrm{d} : X \times X \to \mathbb{R}$ reel değerli fonksiyon olmak üzere, $x, y, z \in X$ için aşağıdaki özelliklerini sağlıyorsa d fonksiyonuna X üzerinde bir **metrik** (**uzaklık fonksiyonu**) denir.

(a_1) $\mathrm{d}(x, y) \geq 0$

(a_2) $\mathrm{d}(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(a_3) $\mathrm{d}(x, y) = \mathrm{d}(y, x)$

(a_4) $\mathrm{d}(x, y) \leq \mathrm{d}(x, z) + \mathrm{d}(z, y)$ (Üçgen Eşitsizliği)

Bu durumda (X, d) ikilisine bir metrik uzay ve $(a_1) - (a_4)$ özelliklerine de **metrik aksiyomları** denir. Bir küme üzerinde birden fazla metrik tanımlanabilir.
(**Kreyszig, 1987**)

Örnek 2.1.2 $X = \mathbb{R}$, $x, y \in \mathbb{R}$ ve

$$\mathrm{d} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

olmak üzere

$$\mathrm{d}(x, y) = |x - y|$$

şeklinde tanımlanan d dönüşümü $\mathbb{R}$ üzerinde bir metriktir. Bu metriğe $\mathbb{R}$ üzerindeki öklid metriği (adi metrik) denir.

Örnek 2.1.3 $X \neq \emptyset$ bir küme olmak üzere, $\forall x, y \in X$ için

$$\mathrm{d}(x, y) = \begin{cases} 0 \ , x = y \\ 1 \ , x \neq y \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan d dönüşümü X üzerinde bir metriktir. Bu metriğe X üzerindeki ayrık metrik denir.

Örnek 2.1.4 $\mathbb{R}^n$(veya $\mathbb{C}^n$), $n \in \mathbb{N}$, tüm sıralı reel (veya kompleks) n-lilerin kümesini göstermek üzere, $\forall x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ için aşağıda verilen $\mathrm{d} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\mathrm{d}(x, y) = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^2 \right)^{1/2}$$

şeklindeki d dönüşümüne $\mathbb{R}^n$ üzerindeki öklid metriği (adi metrik), $(\mathbb{R}^n, \mathrm{d})$ ikilisine ise n-boyutlu öklid uzayı denir.

Örnek 2.1.5 $X \neq \emptyset$ bir küme, $B(X), X$ ten $\mathbb{R}$ ye tanımlı bütün sınırlı fonksiyonların kümesi ve $\mathrm{d} : B(X) \times B(X) \to \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\mathrm{d}(f, g) = \sup |f(t) - g(t)| : t \in X\}$$

şeklinde tanımlı d dönüşümü $B(X)$ üzerinde bir metriktir.

Örnek 2.1.6 $[a, b] \subset \mathbb{R}$ için $C[a, b], [a, b]$ üzerindeki sürekli ve reel değerli fonksiyonlar kümesi ve $d : C[a, b] \times C[a, b] \to \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\mathrm{d}(f, g) = \max\{|f(t) - g(t)| : t \in X\}$$

şeklinde tanımlı d dönüşümü $C[a, b]$ üzerinde bir metriktir.

Tanım 2.1.7 (X, d) metrik uzayında $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ bir dizi ve $x_0 \in X$ olmak üzere

$x_0 \in X$ **noktasına yakınsaktır** $\Longleftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N} \ni \forall n \geq n_\varepsilon\ \mathrm{d}(x_n, x_0) < \varepsilon$

ve

$$x_n \to x_0 \quad veya \quad \lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \tag{2.1}$$

şeklinde gösterilir. (**Kreyszig, 1987**)

Teorem 2.1.8 (X, d) metrik uzayında $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ bir dizi ve $x_0 \in X$ olmak üzere $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$ ise,

(i) x_0 limiti tektir.

(ii) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ sınırlıdır.

(iii) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ nin her $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ alt dizisinin limiti de x_0 dır.

(iv) Eğer $y_n \to y_0$ ise bu durumda $\mathrm{d}(x_n, y_n) \to \mathrm{d}(x_0, y_0)$ dir. (**Kreyszig, 1987**)

Tanım 2.1.9 (X, d) metrik uzay $x_0 \in X$ ve $r > 0$ bir sayı olsun;

$B(x_0, r) := \{x \in X : \mathrm{d}(x_0, x) < r\}$, ($x_0$ merkezli r yarıçaplı bir **açık yuvar**),

$\tilde{B}(x_0, r) := \{x \in X : \mathrm{d}(x_0, x) \leq r\}$, ($x_0$ merkezli r yarıçaplı bir **kapalı yuvar**),

$S(x_0, r) := \{x \in X : \mathrm{d}(x_0, x) = r\}$, ($x_0$ merkezli r yarıçaplı bir **yuvar yüzeyi**)

şeklinde tanımlanır.

Eğer $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in B(\alpha, r)$ olacak şekilde bir $B(\alpha, r)$ açık yuvarı varsa $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi X metrik uzayında sınırlıdır denir. Ayrıca $A \subseteq B(\alpha, r)$ olacak şekilde $B(\alpha, r)$ açık yuvarı varsa $A \subseteq X$ alt kümesine X metrik uzayında **sınırlıdır** denir. (**Kreyszig, 1987**)

Tanım 2.1.10 (X, d) metrik uzay ve $A \subseteq X$ olmak üzere, eğer $B(x_0, \varepsilon) \subseteq A$ olacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ sayısı varsa $x_0 \in A$ sayısına A nin bir **iç noktası** denir. (**Kreyszig, 1987**)

Tanım 2.1.11 (X, d) metrik uzay ve $\Omega \subset X$ olmak üzere, eğer Ω kümesinin her noktası Ω nın bir iç noktası ise Ω ya (X de) bir **açık küme** denir. (**Kreyszig, 1987**)

Tanım 2.1.12 (X, d) metrik uzay ve $\Omega \subseteq X$ olmak üzere,

(i) $\forall \varepsilon > 0$ sayısı için $0 < \mathrm{d}(c, x) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $x \in X$ varsa $c \in X$ sayısına Ω kümesinin bir **yığılma noktası** denir.

(ii) Eğer bir $c \in \Omega$ noktası Ω nın bir yığılma noktası değilse c elemanına Ω nin **izole noktası** denir. (**Kreyszig, 1987**)

Teorem 2.1.13 (X, d) metrik uzay ve $A \subseteq X$ olmak üzere aşağıdaki ifadeler denktir.

(i) $c \in X$ noktası A kümesinin bir yığılma noktasıdır.

(ii) $\forall \varepsilon > 0$ için $B(c, \varepsilon)$ açık yuvarı A kümesinin sonsuz çoklukta elemanını kapsar.

(iii) A kümesinde bir $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ vardır ki $n \in \mathbb{N}$ iken $x_n \neq c$ ve $x_n \to c$ dir. (**Kreyszig, 1987**)

Tanım 2.1.14 (X, d) metrik uzayı ve $F \subseteq X$ alt kümesi verilsin. Eğer F tüm yığılma noktalarını kapsıyorsa F ye X te bir **kapalı küme** denir. (**Kreyszig, 1987**)

Teorem 2.1.15 (X, d) metrik uzay olmak üzere,

(i) X teki açık kümelerin herhangi bir kolleksiyonunun birleşimi X te bir açık kümedir.

(ii) X teki açık kümelerin herhangi bir sonlu kolleksiyonunun kesişimi X te bir açık kümedir. (**Kreyszig, 1987**)

Teorem 2.1.16 (X, d) metrik uzay olmak üzere, $E \subseteq X$ alt kümesi X te kapalıdır $\Leftrightarrow$ $E^c = X \setminus E$ (E nin tümleyeni), X te bir açık kümedir. (**Kreyszig, 1987**)

Teorem 2.1.17 (X, d) metrik uzay olmak üzere

(il) X teki kapalı kümelerin herhangi bir kolleksiyonunun kesişimi X te bir kapalı kümedir.

(ii) X teki kapalı kümelerin herhangi bir sonlu kolleksiyonunun birleşimi X te bir kapalı kümedir. (**Kreyszig, 1987**)

Tanım 2.1.18 $A \subseteq X$ olmak üzere

(i) A kümesinin tüm iç noktalarının kümesine A nın içi denir ve $\mathring{A}$ şeklinde gösterilir.

(ii) A kümesinin noktalarını ve tüm yığılma noktalarını kapsayan kümeye A nın kapanışı denir ve $\bar{A}$ şeklinde gösterilir. (**Kreyszig, 1987**)

Tanım 2.1.19 (X, d_1) ve (Y, d_2) metrik uzaylar $A \subseteq X$, c noktası A nin bir yığılma noktası ve $l \in Y$ olsun.

$x \in X$ ve $\forall \varepsilon > 0$ için $\mathrm{d}_2(f(x), l) < \varepsilon$ iken $\mathrm{d}_1(x, c) < \delta$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı var ise $l \in Y$ noktasına $f : A \to Y$ fonksiyonunun c **noktasındaki limiti** denir ve $\lim\limits_{x \to c} f(x) = l$ şeklinde gösterilir. Burada c noktasının A kümesine ait olması gerekmez. (**Kreyszig, 1987**)

Tanım 2.1.20 (X, d_1) ve (Y, d_2) metrik uzaylar ve $c \in X$ olmak üzere, $f : X \to Y$ fonksiyonunu göz önüne alalım. Eğer

$\forall \varepsilon > 0$ için $\mathrm{d}_1(x, c) < \delta$ iken $\mathrm{d}_2(f(x), f(c)) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı var ise f fonksiyonu c noktasında **süreklidir** denir.

Eğer f fonksiyonu X in her noktasında sürekli ise bu durumda f ye X uzayında süreklidir denir. (**Kreyszig, 1987**)

Tanım 2.1.21 (X, d_1) ve (Y, d_2) metrik uzaylar olsun. $f : X \to Y$ fonksiyonunu alalım, eğer

$\forall \varepsilon > 0$ için $\mathrm{d}_1(x_1, x_2) < \delta$ iken $\mathrm{d}_2(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı var ise f fonksiyonu X te **düzgün süreklidir** denir.

Düzgün sürekli olan bir fonksiyon aynı zamanda süreklidir ancak tersi doğru değildir. (**Kreyszig, 1987**)

Tanım 2.1.22 (X, d) metrik uzay olsun.$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, X te bir dizi olsun. $\forall \varepsilon > 0$ ve $m > n \geq n_0$ için $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ olacak şekilde bir n_0 sayısı varsa $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisine bir Cauchy dizisi denir. (**Kreyszig, 1987**)

Teorem 2.1.23 (X, d) metrik uzay olsun. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, X te bir yakınsak dizi ise $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ bir Cauchy dizisi olur. Bu teoremin tersi $\mathbb{R}$ ve $\mathbb{C}$ kümelerinde öklid metriğine göre doğru olmakla birlikte genel olarak doğru değildir. (**Kreyszig, 1987**)

Lemma 2.1.24 (X, d) metrik uzayında $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ bir dizi ve $\forall k \in \mathbb{N}$ için x_{n_k} dizisi $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ nin bir altdizisi olsun. Eğer $x_{n_k} \to x$ ise bu durumda $x_n \to x$ dir.

(**Kreyszig, 1987**)

Tanım 2.1.25 (X, d) metrik uzay ve $A \subseteq X$ olsun, A daki her Cauchy dizisi A daki bir noktaya yakınsıyor ise A kümesine **tamdır** denir. (**Kreyszig, 1987**)

Tanım 2.1.26 (X, d) metrik uzayındaki her Cauchy dizisi X teki bir noktaya yakınsıyor ise (X, d) metrik uzayına **tam metrik uzay** denir. (**Kreyszig, 1987**)

Tanım 2.1.27 (X, d) metrik uzay ve $A \subseteq X$ olsun, eğer A daki her dizi, limiti A da olan yakınsak bir alt diziye sahip ise A kümesine **kompakt küme** denir. Eğer X kompakt ise (X, d) metrik uzayı kompakt olur. (**Kreyszig, 1987**)

Bir $A \subseteq X$ alt kümesinin kompaktlığı, X uzayında tanımlanan metriğe bağlıdır, örneğin $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ alt kümesi, $\mathbb{R}$ deki öklid metriğe göre kompakttır; ancak ayrık metriğe göre kompakt değildir. (**Kreyszig, 1987**)

Tanım 2.1.28 (X, d) metrik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. $X = \bar{A}$ ise A kümesine X te **yoğun küme** denir. (**Kreyszig, 1987**)

Örnek 2.1.29 $\mathbb{Q}$ sayılar kümesi $\mathbb{R}$ kümesinde yoğundur; ancak $\mathbb{Z}$ sayılar kümesi $\mathbb{R}$ kümesinde yoğun değildir.

2.2 Vektör Uzayları

Tanım 2.2.1 $\mathrm{V} \neq \emptyset$ bir küme ve $\mathbb{F}$ bir cisim olmak üzere,

$+ : \mathrm{V} \times \mathrm{V} \to \mathrm{V}, \quad (x, y) \to x + y$

$\cdot : \mathbb{F} \times \mathrm{V} \to \mathrm{V}, \quad (\lambda, x) = \lambda x$

dönüşümleri ile sırasıyla vektörel toplama ve skalerle çarpma işlemlerini tanımlanır.

$\forall x, y, z \in \mathrm{V}$ ve $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$ için aşağıdaki koşullar sağlansın:

i. $x + y = y + x$

ii. $x + (y + z) = (x + y) + z$

iii. $\forall x \in \mathrm{V}$ için $x + 0 = x$ eşitliğini sağlayan bir tek $0 \in \mathrm{V}$ vardır.

iv. $\forall x \in \mathrm{V}$ için $x + (-x) = 0$ eşitliğini sağlayan bir tek $-x \in \mathrm{V}$ vardır.

v. $\forall x \in \mathrm{V}$ için $1 \cdot x = x$

vi. $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$

vii. $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu y$

viii. $(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$

Bu durumda V ye $\mathbb{F}$ cismi üzerinde bir **vektör uzayı (lineer uzay)**, elemanlarına ise **vektör** (**nokta**) denir. $\mathrm{V} = \mathbb{R}$ alınırsa V ye bir reel vektör uzayı, $\mathrm{V} = \mathbb{C}$ alınırsa V ye bir kompleks **vektör uzayı** denir. (**Pick, Kufner ve ark. 2012**)

Tanım 2.2.2 V, $\mathbb{F}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı ve $\emptyset \neq W \subseteq \mathrm{V}$ bir alt kümesi olsun. Eğer W, V vektör uzayındaki toplama ve skalerle çarpma işlemlerine göre bir vektör uzayı oluşturuyorsa W ye V nin bir (lineer) **alt uzayı** denir.
(**Pick, Kufner ve ark. 2012**)

Teorem 2.2.3 $\emptyset \neq W \subseteq \mathrm{V}$ kümesinin V nin bir alt uzayı olabilmesi için gerek ve yeter koşul $y_1, y_2 \in W$ ve $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{F}$ için $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \in W$ olmasıdır.
(**Pick, Kufner ve ark. 2012**)

Tanım 2.2.4 V, $\mathbb{F}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun.
$\|\cdot\| : \mathrm{V} \to \mathbb{R}, \quad x \to \|x\|$ dönüşümü $\forall x, y \in \mathrm{V}$ ve $\forall \lambda \in \mathbb{F}$ için aşağıdaki özellikler sağlanıyor ise V üzerinde bir norm tanımlanmış olur.

(n_1) $\|x\| \geq 0$

(n_2) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(n_3) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$

(n_4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Üçgen Eşitsizliği).

Bu durumda $(\mathrm{V}, \|\cdot\|)$ ikilisine bir **normlu vektör uzayı** ve $(n_1)-(n_4)$ özelliklerine ise norm aksiyomları denir. Eğer $\mathrm{V}=\mathbb{R}$ ve $\mathrm{V}=\mathbb{C}$ ise sırasıyla reel normlu uzay, kompleks normlu uzay olur. Bir vektör uzayı üzerinde birden fazla normlu uzay tanımlanabilir. (**Pick, Kufner ve ark. 2012**)

Örnek 2.2.5 $n \in \mathbb{N}$ için $\mathbb{R}^n$ öklid vektör uzayı

$$\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2\right)^{1/2}, \quad x=(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

şeklinde tanımlı $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dönüşümü ile bir normlu uzaydır. Bu uzaya $\mathbb{R}^n$ deki öklid (adi) normu denir.

Örnek 2.2.6 l_p , $(1 \leq p < \infty)$ uzayı

$$\|x\|_{l_p} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{1/p}$$

şeklinde tanımlı $\|\cdot\|_{l_p} : l_p \to \mathbb{R}$ dönüşümü ile bir normlu uzaydır.

Tanım 2.2.7 Her normlu vektör uzayından

$$\mathrm{d}(x,y) = \|x-y\|, \quad x, y \in \mathrm{V}$$

şeklinde bir metrik elde edilebilir. Bu metriğe $\|\cdot\|$ normu tarafından üretilen metrik (**$\|\cdot\|$ normunun indirgediği metrik**) denir. (**Rudin, 1991**)

Teorem 2.2.8 V, $\mathbb{F}$ cismi üzerinde tanımlı bir vektör uzayı olsun.

$$\|\cdot\| : \mathrm{V} \to \mathbb{R}$$

şeklinde tanımlı her norm dönüşümü V vektör uzayı üzerinde süreklidir. (**Rudin, 1991**)

Teorem 2.2.9 $\mathbb{F}$ cismi üzerinde tanımlı herhangi bir V normlu vektör uzayında vektörel toplama ve skalerle çarpma dönüşümleri süreklidir. (**Rudin, 1991**)

Tanım 2.2.10 V, $\mathbb{F}$ cismi üzerinde tanımlı bir vektör uzayı olsun. $\forall x \in$ V için

$$k\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq K\|x\|_1$$

olacak şekilde $k, \mathrm{K} \in \mathbb{R}$ pozitif sayıları varsa V üzerinde tanımlı $\|\cdot\|_1$ ve $\|\cdot\|_2$ normlarına **denk normlar** denir. (**Rudin, 1991**)

Tanım 2.2.11 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $(\mathrm{V}, \|\cdot\|)$ normlu uzayında bir dizi ve $x_0 \in V$ olsun. Eğer

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x_0\| = 0$$

olursa x_n dizisi x_0 noktasına yakınsıyor denir ve $x_n \to x_0$ veya $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ şeklinde gösterilir. Normlu uzayda tanımlanan bu yakınsamaya **norma göre yakınsama** denir. (**Rudin, 1991**)

Tanım 2.2.12 $(\mathrm{V}, \|\cdot\|)$ normlu uzayı içinde bir dizi $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ olsun.
$\forall\varepsilon > 0$ için $m, n \geq n_\varepsilon$ iken $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$ olacak şekilde ε a bağlı bir n_ε doğal sayısı varsa $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisine bir **Cauchy dizisi** denir. (**Rudin, 1991**)

Tanım 2.2.13 Bir $(\mathrm{V}, \|\cdot\|)$ normlu uzayı içindeki her Cauchy dizisi V içindeki bir noktaya yakınsıyor ise bu $(\mathrm{V}, \|\cdot\|)$ normlu uzayına **Banach Uzayı** adı verilir. (**Rudin, 1991**)

Örnek 2.2.14 $\mathrm{V} = \mathbb{R}^n$(veya $\mathrm{V} = \mathbb{C}^n$) vektör uzayı

(i) $\|x\|_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|$

(ii) $\|x\|_p = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty,$

(iii) $\|x\|_\infty = \max\{|x_i| : i = 1, 2, \ldots, n\}$ normlarına göre birer **Banach** uzayıdır.

Örnek 2.2.15 $V = \mathbb{R}$ (veya $\mathrm{V} = \mathbb{C}$)olmak üzere $\mathbb{F}$ üzerinde tanımlı V vektör uzayı

$$\|f\|_{C[a,b]} = \max_{t\in[a,b]} |f(t)|$$

normuna göre bir **Banach** uzayıdır.

2.3 Ölçü Teorisi

Tanım 2.3.1 $\emptyset \neq \mathfrak{H} \subset X$ kümesinin sınıfı için aşağıdaki özellikler sağlanıyor ise bu $\mathfrak{H}$ sınıfına bir **halka** adı verilir.

(i) $\forall A, B \in \mathfrak{H}, \quad A \setminus B \in \mathfrak{H}$

(ii) $\forall A, B \in \mathfrak{H}, \quad A \cup B \in \mathfrak{H}$

Eğer (ii) yerine

$$\forall k \in \mathbb{N}, A_k \in \mathfrak{H} \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathfrak{H}$$

şartı sağlanırsa bu durumda $\mathfrak{H}$ halkasına bir σ **- halka** denir. (**Royden, 1968**)

Tanım 2.3.2 X kümesindeki $\mathcal{A}$ sınıfı için aşağıdaki özellikler sağlanırsa bu $\mathcal{A}$ sınıfına X kümesi üzerinde bir **cebir** adı verilir.

(i) $X \in \mathcal{A}$

(ii) $\forall E \in \mathcal{A}, \quad E^c = X \backslash E \in \mathcal{A}$

(iii) $\forall k = 1, 2, ..., n, \quad E_k \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup\limits_{k=1}^{n} E_k \in \mathcal{A}$

Eğer (iii) yerine

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad E_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} E_k \in \mathcal{A} \tag{2.2}$$

şartı sağlanırsa bu durumda $\mathcal{A}$ cebirine bir σ**-cebir** adı verilir. (**Royden, 1968**)

Örnek 2.3.3 X bir küme ve $\mathcal{A} = \mathrm{P}(X)$ olsun. $\mathcal{A}$, X üzerinde bir σ- cebirdir.

Örnek 2.3.4 $X = \mathbb{N}$, $\mathcal{A} = \{\varnothing, \{1, 3, 5, ..., 2n-1, ...\}, \{2, 4, 6, ..., 2n, ...\}, \mathbb{N}\}$ şeklinde tanımlanırsa $\mathcal{A}$ sınıfı, X kümesi üzerinde bir σ- cebirdir.

Örnek 2.3.5 X bir sonsuz küme ve $\mathcal{A}$ sınıfıda X in tüm sonlu alt kümelerinin bir sınıfı olsun. $\mathcal{A}$ sınıfı, X üzerinde bir σ- cebiri değildir. Çünkü $E \in \mathcal{A}$ ise E sonludur. Dolayısıyla, E^c sonsuzdur, aksi durumda X kümesi sonlu olurdu. O halde $E^c \notin \mathcal{A}$ dır.

Teorem 2.3.6 X kümesindeki σ- cebirlerin herhangi sayıdaki kesişimleri yine bir σ- cebiridir. (**Royden, 1968**)

Teorem 2.3.7 $\emptyset \neq \mathcal{K} \in X$ kümesinin bir sınıfı olsun. $\mathcal{K}$ sınıfını kapsayan σ- cebirlerinin bir en küçüğü vardır. (**Royden, 1968**)

Tanım 2.3.8 Bir $\mathcal{K}$ sınıfını kapsayan σ- cebirlerinin en küçüğüne $\mathcal{K}$ nın ürettiği (doğurduğu) σ- cebiri denir, $D(\mathcal{K})$ ile gösterilir. $\mathbb{R}^n$ deki bütün açık (a, b) aralıklarının doğurduğu σ- cebirine **Borel Cebiri** denir ve $\mathcal{B}$ $(\mathbb{R}^n)$ ile gösterilir. $n = 1$ olması halinde $\mathcal{B}(\mathbb{R}^1)$ Borel cebiri $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ ile gösterilir.
$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ nin herbir elemanına bir **Borel Kümesi** denir. (**Royden, 1968**)

Örnek 2.3.9 $X = \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ ve E de bir Borel kümesi olsun.
$E_1 = E \cup \{-\infty\}, E_2 = E \cup \{+\infty\}$ ve $E_3 = E \cup \{-\infty, +\infty\}$ olsun. E kümesi B($\mathbb{R}$) Borel cebirini taradığında E, E_1, E_2, E_3 kümelerinin sınıfı $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ olsun. $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ bir σ-cebiridir. Bu σ- cebirine **Genişletilmiş Borel Cebiri** adı verilir.

Tanım 2.3.10 X bir küme ve $\mathcal{A}$ da X üzerinde bir σ- cebiri olsun. $(X, \mathcal{A})$ ikilisine bir **ölçülebilir uzay**, $\mathcal{A}$ daki her kümeye $\mathcal{A}$-**ölçülebilir uzay** (**ölçülebilir küme**) adı verilir. (**Stein, Shakarchi 2005**)

Tanım 2.3.11 $(X, \mathcal{A})$ bir ölçülebilir uzay olsun.$\mathcal{A}$ üzerinde tanımlı genişletilmiş reel değerli bir μ fonksiyonu

(i) $\mu(\emptyset) = 0$

(ii) $\forall A \in \mathcal{A}, \quad \mu(A) \geq 0$

(iii) Her ayrık (A_n) dizisi için $\mu(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$

özelliklerini sağlarsa bu fonksiyona bir **ölçü fonksiyonu** veya kısaca **ölçü** adı verilir.
$\forall A \in \mathcal{A}$, $\mu(A) < \infty$ ise μ ye bir **sonlu ölçü** adı verilir. X kümesi herbiri sonlu ölçüye sahip sayılabilir adetteki kümelerin birleşimi olarak yazılabiliyorsa μ ölçüsü

σ- **sonludur** denir. Eğer $\mu(X) = 1$ ise bu ölçüye **olasılık ölçüsü** adı verilir. (**Stein, Shakarchi 2005**)

Örnek 2.3.12 $X \neq \emptyset$ ve $\mathcal{A} = \mathrm{P}(X)$ olsun. $\forall E \in \mathcal{A}$, $\mu(E) = 0$ biçiminde tanımlanan μ fonksiyonu bir sonlu ölçü ve dolayısıyla bir σ- sonlu ölçüdür.

Örnek 2.3.13 $X \neq \emptyset$ ve $\mathcal{A} = \mathrm{P}(X)$ olsun. $E \in \mathcal{A}$ için

$$\mu(E) = \begin{cases} 0, & E = \emptyset \\ +\infty, & E \neq \emptyset \end{cases} \tag{2.3}$$

biçiminde tanımlanan μ fonksiyonu bir ölçüdür. Bu ölçü ne sonlu ne de σ- sonludur.

Tanım 2.3.14 Bir X kümesi, X in alt kümelerinin bir $\mathcal{A}$ σ- cebiri ve $\mathcal{A}$ üzerinde tanımlı bir μ ölçüsünden oluşan $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ölçüsüne bir **ölçü uzayı** adı verilir. (**Stein, Shakarchi 2005**)

Teorem 2.3.15 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı olsun. Eğer

$$A, B \in \mathcal{A} \;\; ve \;\; A \subset B \Longrightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$$

şeklindedir.

Ayrıca,

$$\mu(A) < \infty \Longrightarrow \mu(B \backslash A) = \mu(B) - \mu(A) \tag{2.4}$$

dır. (**Stein, Shakarchi 2005**)

Teorem 2.3.16 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı olsun.

1. $(A_n), \mathcal{A}$ daki elemanların artan bir dizisi ise

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n) \tag{2.5}$$

   dır.

2. $(B_n), \mathcal{A}$ daki elemanların bir azalan dizisi ve $\mu(B_1) < \infty$ ise

$$\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n) \tag{2.6}$$

dır. (**Rudin, 1987**)

Sonuç 2.3.17 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı olsun.

1. $(A_n), \mathcal{A}$ daki elemanların bir artan dizisi ise

$$\mu(\lim_{n\to\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) \tag{2.7}$$

dır.

2. $(B_n), \mathcal{A}$ daki elemanların bir azalan dizisi ve $\mu(B_1) < \infty$ ise

$$\mu(\lim_{n\to\infty} B_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n) \tag{2.8}$$

dır. (**Rudin, 1987**)

Teorem 2.3.18 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı olsun. $(A_n), \mathcal{A}$ ya ait kümelerin herhangi bir dizisi ise

$$\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) \tag{2.9}$$

dır. (**Rudin, 1987**)

Tanım 2.3.19 X bir küme ve $\mathrm{P}(X)$ de X in kuvvet kümesi olsun. $\mathrm{P}(X)$ üzerinde tanımlı genişletilmiş reel değerli bir μ^* fonksiyonu

(i) $\mu^*(\emptyset) = 0$

(ii) $\forall E \in \mathrm{P}(X), \mu^*(E) \geq 0$

(iii) $A \subset B \subset X \Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$

(iv) $\forall n \in N, A_n \in \mathrm{P}(X) \Rightarrow \mu^*(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}) \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$

şartları sağlanırsa μ^* fonksiyonuna X kümesinde bir **dış ölçüsüdür** denir.

Ölçü ve dış ölçü tanımları göz önüne alınırsa ne ölçünün ne de dış ölçünün bir ölçü olması gerekmediği görülür. Dış ölçü, ölçü fonksiyonunun sağladığı pek çok özelliği sağladığı için bu ad verilmiştir. Bir ölçünün bir dış ölçü olabilmesi için onun tanım kümesinin P(X) kuvvet kümesi olması gerekir. (**Stein, Shakarchi 2005**)

Örnek 2.3.20 X herhangi bir küme ve P(X) üzerinde tanımlanan

$$\mu^*(A) = \begin{cases} 0, & A = \emptyset \\ 1, & A \neq \emptyset \end{cases} \tag{2.10}$$

fonksiyonu bir ölçü olmayıp bir dış ölçüdür.

Örnek 2.3.21 X herhangi bir sonsuz küme ve P(X) üzerinde tanımlanan

$$\mu^*(A) = \begin{cases} 0, \; n(A) < \infty \\ 1, \; n(A) = \infty \end{cases} \tag{2.11}$$

fonksiyonu bir dış ölçü değildir.

Bilindiği gibi, bir I aralığının $\ell(I)$ uzunluğu o aralığın uç noktalarının farkı olarak tanımlanır. Yani $I = [a, b]$ (veya (a,b), (a,b], [a,b)) aralığının boyu $\ell(I) = b - a$ dır. Uzunluk bir küme fonksiyonuna (bir koleksiyondaki herbir kümeye bir genişletilmiş reel sayı karşılık getiren fonksiyon) bir örnektir. Bu durumda uzunluğun tanım kümesi aralıklar koleksiyonu, değer kümesi de genişletilmiş reel sayılar kümesidir. Burada uzunluk kavramı, aralıklardan daha karışık kümeler için tanımlanacaktır. Örneğin açık bir kümenin uzunluğunu, bu kümeyi oluşturan açık, ayrık aralıkların uzunlukları toplamı olarak tanımlanır. Bir λ fonksiyonu, $\mathbb{R}$ nin alt kümelerinin bir $\mathfrak{M}$ sınıfı üzerinde tanımlı olsun ve aşağıdaki özellikleri sağlasın:

I. λ, $\mathbb{R}$ nin herbir E alt kümesi üzerinde tanımlı olsun, yani

$$\mathfrak{M} := \mathrm{P}(\mathbb{R})$$

olsun.

II. Her bir I aralığı için λ(I)=ℓ(I) olsun.

III. Eğer (E_n) bir ayrık dizi ve λ bunların herbiri üzerinde tanımlı ise

$$\lambda(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n)$$

olsun.

IV. λ öteleme altında invaryant olsun. Yani λ fonksiyonu, E ve

$$E + y := \{x + y : x \in E\}$$

kümeleri üzerinde tanımlı olduğunda

$$\lambda(E + y) = \lambda(E)$$

olsun.

(I)-(IV) özelliği sağlayan bir küme fonksiyonu tanımlamak mümkün değildir. Bugüne kadar ilk üç şartı sağlayan bir küme fonksiyonu bilinmemektedir. Bundan dolayı bu üç şartın birinden vazgeçmek gerekmektedir. O halde (II), (III), (IV) şartlarını bırakıp, (I) şartını değiştirmek daha uygundur. Burada yapılması gereken değişiklik λ fonksiyonunu tüm alt kümeler üzerinde tanımlamayıp daha dar σ- cebiri üzerinde tanımlamaktır. Yani $\mathfrak{M}$ olarak P($\mathbb{R}$) kuvvet kümesi değil, üzerinde λ fonksiyonunu tanımlayabilecek uygun bir σ- cebiri almaktır. Şimdi Lebesgue dış ölçü tanımını verelim.

Tanım 2.3.22 (I_k), $\mathbb{R}$ nin sınırı ve açık alt aralıklarının bir dizisi,

$$\mathcal{T}_A = \{(I_k) : A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k\}$$

olsun. P($\mathbb{R}$) üzerinde

$$\lambda^*(A) = \inf\{\sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k) : (I_k) \in \mathcal{T}_A\} \tag{2.12}$$

biçiminde tanımlanan λ^* bir **dış ölçü**dür. Bu dış ölçüye **Lebesgue dış ölçüsü** adı verilir. (**Rudin, 1987**)

Teorem 2.3.23 Lebesgue dış ölçüsü $\mathbb{R}$ nin herbir alt aralığına onun uzunluğunu karşılık getirir, yani $I \subset \mathbb{R}$ bir aralık ise

$$\lambda^*(I) = \ell(I)$$

dır. (**Rudin, 1987**)

Teorem 2.3.24 $\mathbb{R}^n$ üzerindeki Lebesgue dış ölçüsü herbir aralığa onun hacmini karşılık getirir. (**Rudin, 1987**)

Sonuç 2.3.25 A sayılabilir küme ise $\lambda^*(A) = 0$ dır.

Sonuç 2.3.26 $[0, 1]$ kümesi sayılamayan bir kümedir.

Tanım 2.3.27 X bir küme μ^* da X üzerinde bir dış ölçü olsun. Eğer X in herbir A alt kümesi için

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c) \tag{2.13}$$

ise X in E alt kümesi μ^*- **ölçülebilir** (μ^* ye göre ölçülebilir) denir.

μ^* fonksiyonunun alt toplamsallık özelliği de denilen

$$\mu^*(\bigcup A_k) \leq \sum \mu^*(A_k)$$

özelliğinden, X in bütün A ve E alt kümeleri için

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$$

olacağından bir E kümesinin μ^*- ölçülebilir olması için herbir $A \subset X$ için

$$\mu^*(A) \leq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c) \tag{2.14}$$

eşitsizliğinin sağlandığını göstermek yeterlidir. Ayrıca, eğer

$\mu^*(A) = +\infty$ ise (2.14) eşitsizliğinin sağlanacağı açıktır. O halde X in bir E alt kümesinin μ^*- ölçülebilir olduğunu göstermek için X in

$$\mu^*(A) < +\infty$$

şartını sağlayan herbir A alt kümesi için (2.14) eşitsizliğinin sağlandığı göstermek yeterlidir. (**Stein, Shakarchi 2005**)

Teorem 2.3.28 X bir küme ve μ^* da X üzerinde bir dış ölçü olsun. X in herbir E alt kümesi için $\mu^*(E) = 0$ veya $\mu^*(E^c) = 0$ ise E kümesi μ^*- ölçülebilirdir. (**Stein, Shakarchi 2005**)

Sonuç 2.3.29 $\emptyset$ ve X, X üzerinde tanımlanan her dış ölçüye göre ölçülebilirdir. Özel olarak $\emptyset$ ve $\mathbb{R}$ kümeleri λ^* Lebesgue dış ölçüsüne göre ölçülebilirdir.
(**Stein, Shakarchi 2005**)

Teorem 2.3.30 E_1 ve E_2, μ^*- ölçülebilir kümeler ise $E_1 \cup E_2$ de μ^*- ölçülebilirdir. (**Stein, Shakarchi 2005**)

Teorem 2.3.31 X bir küme μ^* X üzerinde bir dış ölçü ve $\mathfrak{M}(X, \mu^*)$ da X üzerinde μ^*- ölçülebilir kümelerin sınıfı olsun.

1. $\mathfrak{M}(X, \mu^*)$ bir σ- cebiridir.

2. μ^* ın $\mathfrak{M}(X, \mu^*)$ sınıfına kısıtlanması bir ölçüdür.

Lebesgue dış ölçüsü olan λ^* ın $\mathfrak{M}(\mathbb{R}, \lambda^*)$ sınıfına ve $\mathbf{B}(\mathbb{R})$ sınıfına olan kısıtlamasına **Lebesgue Ölçüsü** denir ve λ ile gösterilir. İkisini birbirinden ayırmak gerektiğinde, üzerinde Lebesgue ölçüsünün tanımladığı sınıf belirtilir. "$\mathbf{B}(\mathbb{R})$ üzerindeki Lebesgue ölçüsü" veya "$\mathfrak{M}$ üzerindeki Lebesgue ölçüsü" gibi. Bazen de "Borel kümeleri üzerinde tanımlı Lebesgue ölçüsü" şeklinde ifade edilir. (**Royden, 1968**)

Lemma 2.3.32 $a \in \mathbb{R}$ için $(a, +\infty)$ aralığı λ^* dış ölçüsüne göre ölçülebilirdir. (**Royden, 1968**)

Teorem 2.3.33 Herbir Borel kümesi λ^* ölçülebilirdir. (**Royden, 1968**)

2.4 Ölçülebilir Fonksiyonlar

Bu bölümde reel değerli fonksiyonların ölçülebilirliği ayrıca genişletilmiş reel değerli fonksiyonlarla ile ilgili tanım ve teoremlere yer verilecektir.

Tanım 2.4.1 $(X, \mathcal{A})$ bir ölçülebilir uzay olsun. $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu ölçülebilidir $\Longleftrightarrow \forall \alpha \in \mathbb{R}$ için

$$f^{-1}((\alpha, +\infty)) = \{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{A}.$$

Şimdi yukarıdaki tanımda geçen kümelerin şeklini değiştirmeye olanak veren bir lemmayı ifade edelim. (**Stein, Shakarchi 2005**)

Lemma 2.4.2 $(X, \mathcal{A})$ bir ölçülebilir uzay olsun. $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu için aşağıdaki önermeler denktir.

1. $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $A_\alpha = \{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{A}$
2. $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $B_\alpha = \{x \in X : f(x) \leq \alpha\} \in \mathcal{A}$
3. $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $C_\alpha = \{x \in X : f(x) \geq \alpha\} \in \mathcal{A}$
4. $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $D_\alpha = \{x \in X : f(x) < \alpha\} \in \mathcal{A}$

(**Stein, Shakarchi 2005**)

Örnek 2.4.3 Her sabit fonksiyon bir ölçülebilir fonksiyondur.
Gerçekten, $\forall x \in \mathbb{R}$ için $f(x) = c$ ise
$\alpha \geq c$ için

$$\{x \in X : f(x) > \alpha\} = \emptyset \in \mathcal{A}$$

ve $\alpha < c$ için

$$\{x \in X : f(x) > \alpha\} = X \in \mathcal{A}$$

olur. (**Rudin, 1987**)

Örnek 2.4.4 $X = \mathbb{R}$ ve $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ olsun. Sürekli her $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu (Borel) ölçülebilirdir.

Gerçekten, f sürekli olduğunda $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ için

$$\{x \in \mathbb{R} : f(x) > \alpha\} = f^{-1}((\alpha, \infty))$$

kümesi $\mathbb{R}$ de bir açık kümedir. Her açık küme Borel cebirine ait olduğundan

$$\{x \in \mathbb{R} : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

olup Borel ölçülebilirdir. (**Rudin, 1987**)

Teorem 2.4.5 f ve g ölçülebilir fonksiyonlar ve $c \in \mathbb{R}$ olsun.

$$cf, \quad f^2, \quad f + \mathrm{g}, \quad f.\mathrm{g}, \quad |f|$$

fonksiyonları da ölçülebilirdir. (**Rudin, 1987**)

Tanım 2.4.6 $(X, \mathcal{A})$ bir ölçülebilir uzay ve $A \in \mathcal{A}$ olsun.

$$f : A \to \mathbb{R} \text{ ölçülebilirdir } \Leftrightarrow \forall \alpha \in \mathbb{R} \text{ için } \{x \in A : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{A}$$

Lemma 2.4.2 deki denklemlerin $f : A \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için de doğru olacağı açıktır. Bu tanımların benzerleri genişletilmiş reel değerli fonksiyonlar için de verilebilir. (**Rudin, 1987**)

Tanım 2.4.7 $(X, \mathcal{A})$ bir ölçülebilir uzay ve $A \in \mathcal{A}$ olsun.
$f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ ölçülebilirdir $\Leftrightarrow \forall \alpha \in \mathbb{R}$ için

$$f^{-1}((\alpha, +\infty]) = \{x \in A : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{A}$$

olmalıdır. X kümesi üzerinde tanımlı, genişletilmiş reel değerli $\mathcal{A}$ ölçülebilir bütün fonksiyonların kümesi $M(X, \mathcal{A})$ ile gösterilir. Eğer $f \in M(X, \mathcal{A})$ ise

$$\begin{aligned} A &= \{x \in X : f(x) = +\infty\} \\ &= \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X : f(x) > n\} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
B &= \{x \in X : f(x) = -\infty\} \\
&= \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X : f(x) \leq -n\} \\
&= \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X : f(x) > -n\} \right)^c
\end{aligned}
$$

olacağından A ve B ölçülebilirdir. (**Royden, 1968**)

Teorem 2.4.8 $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ ölçülebilirdir $\Leftrightarrow$

$$A = \{x \in X : f(x) = +\infty\},$$

$$B = \{x \in X : f(x) = -\infty\}$$

kümelerinin ve

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x), & x \notin A \cup B \\ 0, & x \in A \cup B \end{cases} \tag{2.15}$$

biçiminde tanımlanan reel değerli f_1 fonksiyonunun ölçülebilir olmasıdır.
(**Stein, Shakarchi 2005**)

Tanım 2.4.9 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ Borel cebirine göre ölçülebilen bir fonksiyona **Borel ölçülebilir fonksiyon** (**Borel fonksiyonu**) adı verilir. $\mathfrak{M}(\mathbb{R}, \lambda^*)$ σ- cebirine göre ölçülebilen bir fonksiyona **Lebesgue ölçülebilir fonksiyon** denir. $\mathbb{R}$ nin Borel kümesi olmayan fakat Lebesgue ölçülebilir alt kümeleri mevcut olduğundan, $\mathbb{R}$ de herbir Borel ölçülebilir fonksiyon Lebesgue ölçülebilirdir. (**Stein, Shakarchi 2005**)

Tanım 2.4.10 $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ olsun.

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$$

$$f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}$$

biçiminde tanımlanan f^+ ve f^- fonksiyonları da X üzerinde tanımlı ve negatif olmayan fonksiyonlardır. f^+ fonksiyonuna f nin pozitif parçası, f^- fonksiyonuna da

f nin negatif parçası denir.

O halde tanımdan,

$$f = f^+ - f^-, \quad |f| = f^+ + f^-,$$

$$f^+ = \frac{1}{2}(|f| + f), \quad f^- = \frac{1}{2}(|f| - f)$$

bağıntıları mevcuttur. (**Royden, 1968**)

Teorem 2.4.11 $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ ölçülebilirdir $\Leftrightarrow$ f^+ ve f^- fonksiyonlarının ölçülebilir olmasıdır. (**Royden, 1968**)

Teorem 2.4.12 $(X, \mathcal{A})$ bir ölçülebilir uzay ve $A \in \mathcal{A}$ olsun. $f, \mathrm{g} : A \to \overline{\mathbb{R}}$ ölçülebilir olsunlar. Bu durumda

$$\{x \in A : f(x) < \mathrm{g}(x)\}, \{x \in A : f(x) \leq \mathrm{g}(x)\}, \{x \in A : f(x) = \mathrm{g}(x)\}$$

kümeleri ölçülebilirdir. (**Royden, 1968**)

Teorem 2.4.13 $(X, \mathcal{A})$ bir ölçülebilir uzay ve $A \in \mathcal{A}$ olsun. $f, \mathrm{g} : A \to \overline{\mathbb{R}}$ ölçülebilir ise $(f \vee \mathrm{g})$ ve $(f \wedge \mathrm{g})$ fonksiyonları ölçülebilirdir. (**Royden, 1968**)

Teorem 2.4.14 (f_n), $A \in \mathcal{A}$ üzerinde tanımlı, $\overline{\mathbb{R}}$- değerli ölçülebilir fonksiyonların bir dizisi ise $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$ ve $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$ fonksiyonları da ölçülebilirdir. (**Royden, 1968**)

Teorem 2.4.15 $(X, \mathcal{A})$ bir ölçü uzayı ve $A \in \mathcal{A}$ olsun. (f_n), A üzerinde tanımlı $\overline{\mathbb{R}}$- değerli ölçülebilir fonksiyonların bir dizisi ise $\liminf\limits_{n\to\infty} f_n$ ve $\limsup\limits_{n\to\infty} f_n$ fonksiyonları ölçülebilirdir.

Ayrıca tanım kümesi $A_0 = \{x \in A : \limsup\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \liminf\limits_{n\to\infty} f_n(x)\}$ olan $\lim\limits_{n\to\infty} f_n$ fonksiyonu da ölçülebilirdir. (**Royden, 1968**)

2.5 İntegral

Bu bölümde önce negatif olmayan ölçülebilir basit fonksiyonların integrali, daha sonra da negatif olmayan, $\overline{\mathbb{R}}$- reel değerli, ölçülebilir fonksiyonların integrali ile ilgili bilgiler verilecektir. Daha sonra da $\overline{\mathbb{R}}$-değerli fonksiyonların integrali üzerinde durulacaktır. Önce basit fonksiyonun tanımını verelim.

Tanım 2.5.1 Görüntü kümesi sonlu elemandan oluşan φ fonksiyonuna **basit fonksiyon** adı verilir. (**Royden, 1968**)

φ reel değerli bir basit fonksiyon ve χ_{E_k}, E_k kümesinin karakteristik fonksiyonu olmak üzere

$$\varphi = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{E_k}, \qquad a_k \in \mathbb{R} \tag{2.16}$$

biçiminde yazılabilir. Eğer φ fonksiyonu X üzerinde tanımlı ise

$$\bigcup_{k=1}^{n} E_k = X$$

dir.

Burada E_k kümelerinin seçilişi tek olmadığından φ nin (2.16) tipindeki gösterimi tek değildir. Eğer $a_1, a_2, ..., a_m$ sayıları φ nin X üzerinde aldığı farklı değerler ve

$$E_k = x \in X \quad ve \quad f(x) = a_k$$

seçilirse E_k kümeleri ayrık olur. Bu durumda

$$\varphi = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{E_k}$$

gösterimine φ fonksiyonunun **standart gösterimi** adı verilir. X üzerinde tanımlı, reel değerli, $\mathcal{A}$ ölçülebilir basit fonksiyonların kümesi $S = S(X, \mathcal{A})$, S deki negatif olmayan fonksiyonların kümesi S^+ ile gösterilir. (**Royden, 1968**)

Tanım 2.5.2 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı olsun a_k lar negatif olmayan reel sayılar $A_1, A_2, ..., A_n$ ler $\mathcal{A}$ ya ait olmak üzere

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k = X \quad ve \quad \varphi = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{E_k} \tag{2.17}$$

gösterimine sahip bir $\varphi \in S^+$ fonksiyonunun μ **ölçüsüne göre integrali**

$$\int_X \varphi d\mu = \sum_{k=1}^{n} a_k \mu(A_k) \tag{2.18}$$

dir.

Bu tanıma göre φ nin μ ye göre integrali ya negatif olmayan bir reel sayı ya da μ ölçüsünün sonlu olmayan bir ölçü olması haline karşılık gelen $+\infty$ değeridir. Belirtelim ki, φ fonksiyonunun μ ye göre integrali ne a_k sayılarına ne de A_k kümelerine bağlıdır. Bununla ilgili olarak şu teoremi verebiliriz. (**Royden, 1968**)

Teorem 2.5.3 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı $\varphi \in S^+(X, \mathcal{A})$ ve A_k lar ayrık olmak üzere φ nin bir gösterimi $\varphi = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \chi_{A_k}$ olsun. φ nin μ ölçüsüne göre integrali ne a_k sayılarına ne de A_k kümelerine bağlıdır. (**Royden, 1968**)

Şimdi negatif olmayan basit fonksiyonların integraline ait temel özellikleri verelim.

Teorem 2.5.4 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı $\varphi \in S^+, \Psi \in S^+$ ve $c \geq 0$ olsun. Bu durumda

(i) $\int\limits_X c.\varphi d\mu = c \int\limits_X \varphi d\mu$

(ii) $\int\limits_X (\varphi + \Psi) d\mu = \int\limits_X \varphi d\mu + \int\limits_X \Psi d\mu$

(iii) $\forall x \in X$ için $\varphi(x) \leq \Psi(x)$ ise $\int\limits_X \varphi d\mu \leq \int\limits_X \Psi d\mu$ dir.

(**Royden, 1968**)

Tanım 2.5.5 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı ve $f \in M^+(X, \mathcal{A})$ olsun. f fonksiyonunun μ ölçüsüne göre **integrali**

$$\int\limits_X f d\mu = \sup \int\limits_X \varphi d\mu : \varphi \in S^+ \quad ve \quad \varphi \leq f \tag{2.19}$$

genişletilmiş reel sayısıdır.

E $\in \mathcal{A}$ olsun. f nin μ ye göre E üzerindeki integrali

$$\int\limits_X f d\mu = \int\limits_X f.\chi_E d\mu. \tag{2.20}$$

sayısıdır. (**Royden, 1968**)

Teorem 2.5.6 f, g $\in M^+(X, \mathcal{A})$ ve $E, F \in \mathcal{A}$ olsun.

(i) $\forall x \in X$ için $f(x) \leq \mathrm{g}(x)$ ise $\int\limits_X f d\mu \leq \int\limits_X \mathrm{g} d\mu$ dir.

(ii) $E \subset F$ ise $\int\limits_E f d\mu \leq \int\limits_F f d\mu$ dir. (**Royden, 1968**)

Şimdi integral teorisinin temel teoremlerinden birini ifade edelim.

Teorem 2.5.7 [Monoton Yakınsaklık Teoremi] $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı ve (f_n) de $M^+(X, \mathcal{A})$ daki fonksiyonların monoton artan bir dizisi olsun. (f_n) dizisi f fonksiyo-nuna yakınsak ise

$$\int\limits_X f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_X f_n d\mu \tag{2.21}$$

dir. (**Pick, Kufner ve ark. 2012**)

Teorem 2.5.8 (Lebesgue Baskın Yakınsaklık Teoremi) $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı ve (f_n) de $M^+(X, \mathcal{A})$ daki fonksiyonların bir dizisi olsun.

$$|f_n(x)| \leq \mathrm{g}(x), \quad h.h. \;\; x \in X$$

olacak şekilde g integrallenebilir bir fonksiyon olsun. (f_n) dizisi f fonksiyonuna yakınsak ise $\forall n \in \mathbb{N}$ için f_n ve f integrallenebilirdir ve

$$\int\limits_X f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_X f_n d\mu$$

dır. (**Pick, Kufner ve ark. 2012**)

Lemma 2.5.9 $(X, \mathcal{A})$ bir ölçülebilir uzay, $A \in \mathcal{A}$ ve $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonu ölçülebilir olsun. Bu taktirde A üzerinde tanımlı $\overline{\mathbb{R}}$-değerli, ölçülebilir basit fonksiyonların öyle bir artan (φ_n) dizisi vardır ki $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n = f$ dir. Eğer f sınırlı ise bu yakınsama düzgündür. (**Royden, 1968**)

Teorem 2.5.10 (i) $f \in M^+$ ve $c \geq 0$ ise $cf \in M^+$ olup,

$$\int\limits_X cf d\mu = c \int\limits_X f d\mu$$

dir.

(ii) $f, \mathrm{g} \in M^+$ ise $f+\mathrm{g} \in M^+$ olup,

$$\int_X (f+\mathrm{g})d\mu = \int_X f d\mu + \int_X \mathrm{g} d\mu$$

dır. (**Royden, 1968**)

Teorem 2.5.11 (Fatou Lemması) $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı ve f_n de $M^+(X, \mathcal{A})$ daki fonksiyonların bir dizisi ise

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu \tag{2.22}$$

dır. (**Royden, 1968**)

Teorem 2.5.12 (Beppo-Levi Teoremi) $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı ve $\sum f_k$ da X üzerinde tanımlı $[0, +\infty]$ değerli,ölçülebilir fonksiyonların bir serisi olsun. Bu durumda

$$\int_X \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k\right) d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_X f_k d\mu\right) \tag{2.23}$$

dir. (**Royden, 1968**)

Tanım 2.5.13 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı ve $f \in M(X, \mathcal{A})$ olsun. Eğer $\int_X f^+ d\mu$ ve $\int_X f^- d\mu$ integrallerinin her ikisi de sonlu ise f fonksiyonu X üzerinde integrallenebilirdir denir. Bu integral

$$\int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu$$

reel sayısıdır. X üzerinde μ ölçüsüne göre integrallenebilen fonksiyonların sınıfı $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}(X, \mathcal{A}, \mu)$ ile gösterilir. (**Royden, 1968**)

Teorem 2.5.14 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı ve $f \in M(X, \mathcal{A})$ olsun. Bu durumda

$$f \in \mathfrak{L} \Leftrightarrow |f| \in \mathfrak{L}$$

dır ve bunların biri gerçeklendiğinde

$$\left|\int_X f d\mu\right| \leq \int_X |f| d\mu$$

olur. (**Royden, 1968**)

Teorem 2.5.15 (Tchebichev Eşitsizliği) $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı ve $f : X \to [0, +\infty]$ fonksiyonu ölçülebilir olsun. $\alpha > 0$ için

$$A_\alpha = \{x \in X : f(x) \geq \alpha\}$$

denirse

$$\mu(A_\alpha) \leq \frac{1}{\alpha} \int\limits_{A_\alpha} f d\mu \leq \frac{1}{\alpha} \int\limits_{X} f d\mu$$

dır. (**Royden, 1968**)

Teorem 2.5.16 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı, f ile g, X üzerinde integrallenebilen reel değerli fonksiyonlar ve α herhangi bir reel sayı olsun. Bu durumda

(i) $\alpha f \in \mathfrak{L}$ ve $f + \mathrm{g} \in \mathfrak{L}$

(ii) $\int\limits_X \alpha f d\mu = \alpha \int_X f d\mu$

(iii) $\int\limits_X (f + \mathrm{g}) d\mu = \int\limits_X f d\mu = \int\limits_X f d\mu + \int\limits_X \mathrm{g} d\mu$

dır. (**Royden, 1968**)

Tanım 2.5.17 f ölçülebilir bir fonksiyon olmak üzere her kompakt K kümesi üzerinde

$$\int\limits_K |f| \, d\mu < \infty$$

ise f **fonksiyonuna lokal integrallenebilirdir** denir. (**Royden, 1968**)

3 LEBESGUE UZAYLARI

Fonksiyonel analizde, Banach uzayı'nın ve topolojik vektör uzaylarının önemli bir sınıfını Lebesgue uzayı ($L^p(\mathbb{R}^n)$ uzayı) oluşturur. Harmonik analizin önemli konularından biri olan $L^p(\mathbb{R}^n)$ uzayı'nın, harmonik analizin iç problemlerinin çözülmesinde olduğu gibi kısmi türevli denklemler teorisi ile fizik, istatistik, finans, mühendislik ve ayrıca diğer disiplinlerde uygulamaları vardır.

3.1 $L^p(\mathbb{R}^n)$ uzayı

Tanım 3.1.1 $x = (x_1, ..., x_n)$ ve $y = (y_1, ..., y_n)$, $\mathbb{R}^n$ de vektörler olmak üzere

$\mathbb{R}^n$, $n-$boyutlu Öklidyen uzayı $(x, y) = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j y_j$ iç çarpımı ile donatılmış $\mathbb{R}^n$, $n-$boyutlu reel uzayıdır. Burada x vektörünün mutlak değeri $|x| = \left(\sum\limits_{j=1}^{n} x_j^2\right)^{\frac{1}{2}}$ ile tanımlanır.

$\mathbb{R}^n$ üzerinde $dx = dx_1...dx_n$ ile Lebesgue ölçüsü ve $\mathbb{R}^n$ uzayı üzerinde f fonksiyonunun (Lebesgue) integrali

$$\int f(x)\, dx = \int \cdots \int f(x_1, ..., x_n)\, dx_1...dx_n$$

ile gösterilir.

Çok katlı integrali kutupsal koordinatlarda ifade etmek çoğu kez kullanışlı olmaktadır. $r = |x|$ olsun ve $\mathrm{S}^{n-1} = \{x : |x| = 1\}$ ile birim küreyi gösterelim.

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(|x|)\, dx$$

integralinin hesabı için;

$0 \leq r < \infty,\ \ 0 \leq \theta_1, ..., \theta_{n-2} \leq \pi,\ \ 0 \leq \theta_{n-1} \leq 2\pi$ olmak üzere

$x_1 = r \cos \theta_1$

$x_2 = r \sin \theta_1 \cos \theta_2$

$x_3 = r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3$

...

$x_n = r\sin\theta_1 \sin\theta_2 ... \sin\theta_{n-1}$

dönüşümü yapılır. Bu dönüşümün Jakobiyeni

$$J(r,\theta_1,...,\theta_{n-1}) = r^{n-1}\prod_{j=1}^{n-1}(\sin\theta_j)^{n-1-j}$$

olarak hesaplanır.

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} f(|x|)\,dx &= \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^\pi ... \int_0^{2\pi} f(r)\,J(r,\theta)\,drd\theta_1...d\theta_{n-1} \\
&= \int_0^\infty r^{n-1} f(r)\,dr \int_0^\pi \int_0^\pi ... \int_0^{2\pi} \prod_{j=1}^{n-1}(\sin\theta_j)^{n-1-j}\,d\theta_1...d\theta_{n-1} \\
&= \omega_{n-1}\int_0^\infty f(r)\,r^{n-1}dr
\end{aligned}$$

elde edilir, burada ω_{n-1}, birim kürenin yüzey alanıdır.

Genel olarak

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} f(|x|)\,dx &= \int_0^\infty \int_{S^{n-1}} f(r\sin\theta_1,...,r\sin\theta_1...\sin\theta_{n-1})\,r^{n-1}drd\theta_1...d\theta_{n-1} \\
&= \int_0^\infty \int_{S^{n-1}} f(r,\theta)\,r^{n-1}drd\sigma
\end{aligned}$$

biçiminde yazılır. dx hacim elemanı $dx = r^{n-1}drd\sigma$ biçiminde yazılır. Burada $d\sigma$, S^{n-1} üzerinde dx tarafından belirlenen yüzey ölçüsüdür.

Ayrıca;

$$|B(x,r)| = \int_{B(x,r)} dy = \int_{\{x\in\mathbb{R}^n;|x-y|<r\}} dy = \int_{\{z\in\mathbb{R}^n:|z|<r\}} dz = |B(0,r)|$$

ve

$$\begin{aligned}
|B(x,r)| &= \int_{B(x,r)} dz = \int_0^r \int_{S^{n-1}} t^{n-1}dtd\sigma \\
&= \int_{S^{n-1}} d\sigma \int_0^r t^{n-1}dt \\
&= |S^{n-1}|\frac{r^n}{n} = \omega_n r^n.
\end{aligned}$$

dır. (**Sadosky, 1979**)

Tanım 3.1.2 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı ve $1 \leq p < \infty$ olmak üzere $\Omega \subset X = \mathbb{R}^n$ bölgesinde tanımlı ve

$$\int\limits_{\Omega} |f(x)|^p dx < \infty$$

özelligine sahip ölçülebilir $f : \Omega \to \mathbb{R}$ fonksiyonlar sınıfına $L^p(\Omega)$ uzayı veya Ω bölgesinde p. kuvvetten Lebesgue-integrallenebilir fonksiyonlar uzayı denir. $L^p(\Omega)$ uzayı

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \|f\|_{L^p} := \left(\int\limits_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} < \infty$$

seklindeki norm ile tanımlanır. Buradaki $\|f\|_{L^p}$ gösterimine f fonksiyonunun $L^p(\Omega)$-normu denir.

Ω bölgesinde hemen her x için $f(x) \leq M$ olacak şekilde bir M sabiti varsa f fonksiyonuna hemen hemen heryerde sınırlıdır denir. Böyle M sabitlerinin en büyük alt sınırına da $|f|$ nin Ω bölgesindeki esas supremumu(esaslı sınırı) denir ve

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} |f(x)| := \text{ess inf}\,\{K : |f(x)| \leq K \quad h.h.x \quad \in \Omega\}$$

seklinde gösterilir. Ω bölgesindeki hemen hemen heryerde sınırlı f fonksiyonları ile tanımlanan uzay $L^\infty(\Omega)$ seklinde gösterilir. Buna göre bir f fonksiyonunun L^∞- normu

$$\|f\|_{L^\infty} := \operatorname*{ess\,inf}_{x\in\Omega} |f(x)|$$

olarak tanımlanır. (**Pick, Kufner ve ark. 2012**)

Aşağıdaki teoremi ispatsız olarak verelim.

Teorem 3.1.3 (Marcinkiewicz Teoremi) T alt toplamsal operatör ve $p_0 < q_0$, $p_1 \leq q_1$ ve $q_0 \neq q_1$ olsun. Ayrıca T operatörü zayıf (p_0, q_0) ve zayıf (p_1, q_1) tipli operatör olsun ve p ile q

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \qquad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1} \qquad (0 < \theta < 1)$$

biçiminde tanımlansın. Bu durumda T operatörü (p, q) tipli operatördür. (**Sadosky, 1979**).

Lemma 3.1.4 (Young eşitsizliği) $1 < p, p' < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ ve $\forall a, b > 0$ için

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'} \tag{3.1}$$

olur. (**Pick, Kufner ve ark. 2012**)

İspat. $a = 0$ veya $b = 0$ olması durumunda (3.1) ifadesi doğrudur.

Kabul edelim ki $a > 0$ ve $b > 0$ olsun. $f(x) = \exp x$ fonksiyonunun konveks olmasından

$$\begin{aligned} ab &= \exp(\ln(ab)) \\ &= \exp(\ln a + \ln b) \\ &= \exp\left(\frac{1}{p} p \ln a + \frac{1}{q} q \ln b\right) \\ &= \exp\left(\frac{1}{p} \ln(a^p) + \frac{1}{q} \ln(b^q)\right) \\ &\leq \frac{1}{p} \exp(\ln(a^p)) + \frac{1}{q} \exp(\ln(b^q)) \\ &= \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}. \end{aligned}$$

■

Lemma 3.1.5 (Hölder eşitsizliği) $1 < p, q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ve $f \in L^p, \mathrm{g} \in L^q$ ise $f\mathrm{g} \in L^1$ olur ve

$$\int_\Omega |f(x)\mathrm{g}(x)| dx \leq \|f\|_{L^p} \|\mathrm{g}\|_{L^q} \tag{3.2}$$

eşitsizliği sağlanır. (**Pick, Kufner ve ark. 2012**)

İspat. f veya g fonksiyonlarından biri hemen hemen her yerde sıfır olması durumunda (3.2) eşitsizliğinin ispatı aşikardır.

(3.1) eşitsizliğinde (Young eşitsizliği)

$$a = \frac{|f(x)|}{\|f\|_{L^p}}, \qquad b = \frac{|\mathrm{g}(x)|}{\|\mathrm{g}\|_{L^q}}$$

seçilirse

$$\frac{|f(x)|}{\|f\|_{L^p}}.\frac{|g(x)|}{\|g\|_{L^q}} \leq \frac{1}{p}.\frac{|f(x)|^p}{(\|f\|_{L^p})^p} + \frac{1}{q}.\frac{|g(x)|^q}{(\|g\|_{L^q})^q}, \qquad \forall x \in \Omega \tag{3.3}$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

olduğundan (3.3) eşitsizliğinin heriki tarafının integrali alınması ile (3.2) elde edilir.

■

Teorem 3.1.6 (Minkowski eşitsizliği) $1 \leq p \leq \infty$ için eğer $f, g \in L^p$ ise $(f+g) \in L^p$ ve

$$\|f + g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p} \tag{3.4}$$

dir. (**Pick, Kufner ve ark. 2012**)

İspat. $f + g = 0$ olması durumunda ispat aşikardır. Kabul edelim ki $f + g \neq 0$ olsun. Hölder eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
\|f + g\|_{L^p} &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(x) + g(x)|^p dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (|f(x) + g(x)|)|f(x) + g(x)|^{p-1} dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} (|f(x)| + |g(x)|)|f(x) + g(x)|^{p-1} dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)||f(x) + g(x)|^{p-1} dx + \int_{\mathbb{R}^n} |g(x)||f(x) + g(x)|^{p-1} dx \\
&\leq \left(\Big(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx \Big)^{1/p} + \Big(\int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|^p dx \Big)^{1/p} \right) \\
&\times \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x) + g(x)|^{(p-1)(\frac{p}{p-1})} dx \right)^{1-\frac{1}{p}} \\
&= (\|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}).\frac{\|f + g\|_{L^p}}{\|f + g\|_{L^p}} \\
&= (\|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p})
\end{aligned}$$

olup (3.4) eşitsizliği elde edilir. $\blacksquare$

Hölder eşitsizliği ve Lebesgue integralinin özellikleri gözönünde bulundurulduğunda $1 \leq p < \infty$, L^p uzayının bir vektör uzayı olduğu görülür. Bununla birlikte f fonksiyonunun L^p uzayının $\|f\|_{L^p}$ normu altında;

1. $\|f\|_{L^p} \geq 0$
2. $\|f\|_{L^p} = 0$ ise h.h. $f(x) = 0$
3. $\|\alpha f\|_{L^p} = |\alpha| \|f\|_{L^p}$, $\alpha \in \mathbb{R}$
4. $\|f + \mathrm{g}\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|\mathrm{g}\|_{L^p}$

özellikleri sağlandığından $1 \leq p < \infty$, L^p bir normlu uzaydır.

Tanım 3.1.7 f_n ve f fonksiyonları L^p uzayının elemanları olmak üzere; (f_n) dizisi f fonksiyonuna p. mertebeden yakınsaktır (L^p de yakınsaklık)$\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ öyleki $\forall n \geq n_0$ için $\|f_n - f\|_{L^p} < \varepsilon$.

Burada

$$\|f_n - f\|_{L^p} := \left(\int_{\Omega} |f_n - f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty.$$

Buna göre,

(f_n) dizisinin f fonksiyonuna L^p de yakınsak olması için gerek ve yeter şart

$$\lim_{n \to \infty} \|f_n - f\|_{L^p} = 0$$

olmasıdır. (**Rudin, 1976**)

Teorem 3.1.8 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ olmak üzere $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, uzayı

$$\|f\|_{L^p} := \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

normu altında tam ve dolayısıyla Banach uzayıdır. (**Pick, Kufner ve ark. 2012**)

İspat. Kabul edelim ki, $L^p(\Omega)$ uzayında $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bir Cauchy dizisi olsun. $L^p(\Omega)$ uzayında $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nin yakınsak olduğunu ispatlamak için, Lemma 2.1.24 e göre $L^p(\Omega)$ uzayında $(f_{n_k})_{n\in\mathbb{N}}$ nin yakınsak olduğunu göstermek yeterlidir.

$$\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_{L^p} < 2^{-k}, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

olacak şekilde $(n_k)_{n\in\mathbb{N}}$ pozitif tamsayılı artan bir dizi olsun.

$k \in \mathbb{N}$ ve $x \in \Omega$ için

$$\mathrm{g}_k(x) := |f_{n_1}(x)| + \sum_{i=1}^{k} |f_{n_{i+1}}(x) - f_{n_i}(x)|, \quad i \in \mathbb{N} \tag{3.5}$$

şeklinde tanımlansın.

Bu durumda, $\forall x \in \Omega$ için $(\mathrm{g}_k(x))_{k\in\mathbb{N}}$ azalmayan dizidir. Ayrıca Teorem 3.1.6 (Minkowski eşitsizliği) den $\forall k \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}\left(\int_\Omega |\mathrm{g}_k(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} &\leq \|f_{n_1}\|_{L^p} + \sum_{i=1}^{\infty} \|f_{n_{i+1}}(x) - f_{n_i}(x)\|_{L^p} \\ &\leq \|f_{n_1}(x)\|_{L^p} + 1 < \infty.\end{aligned} \tag{3.6}$$

Dolayısıyla $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathrm{g}_k \in L^p(\Omega)$ ve $L^p(\Omega)$ uzayında $(\mathrm{g}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ düzgün sınırlıdır. $(\mathrm{g}_k(x))_{k\in\mathbb{N}}$ monoton dizi olduğundan dolayı

$$\mathrm{g}(x) := \lim_{k\to\infty} \mathrm{g}_k(x), \quad x \in \Omega$$

yani g_k fonksiyonu g fonksiyonuna noktasal yakınsaktır.

(3.6) ifadesi ve Teorem 2.5.8 (Fatou Lemma) den,

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\mathrm{g}(x)|^p dx &= \int_\Omega \lim_{k\to\infty} |\mathrm{g}_k(x)|^p dx \\ &\leq \lim_{k\to\infty} \text{ess inf} \int_\Omega |\mathrm{g}_k(x)|^p dx \\ &\leq \sup_{k\in\mathbb{N}} \int_\Omega |\mathrm{g}_k(x)|^p dx \\ &\leq (\|f_{n_1}\|_{p+1})^p \\ &< \infty\end{aligned}$$

olup g $\in L^p(\Omega)$ elde edilir. Ayrıca

$$\sum_{i=1}^{\infty}(f_{n_{i+1}}(x) - f_{n_i}(x)) < \infty, \quad h.h. \;\; x \in \Omega.$$

Sonuç olarak,

$$f(x) := f_{n_1}(x) - \sum_{i=1}^{\infty}(f_{n_{i+1}}(x) - f_{n_i}(x)), \quad x \in \Omega$$

olmak üzere

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x) = f(x), \quad h.h. \;\; x \in \Omega. \tag{3.7}$$

$\forall k \in \mathbb{N}$ ve $x \in \Omega$ için

$$f_{n_{k+1}}(x) = f_{n_1}(x) - \sum_{i=1}^{k}(f_{n_{i+1}}(x) - f_{n_i}(x)),$$

elde edilir. Bundan dolayı

$$|f_{n_{k+1}}(x)| \leq \mathrm{g}_k(x) \leq \mathrm{g}(x),$$

ve

$$|f_{n_{k+1}}(x)|^p \leq (\mathrm{g}(x))^p.$$

Böylece (3.7) ifadesi ve Teorem 2.5.8 (Lebesgue Baskın Yakınsaklık Teoremi) den $f \in L^p(\Omega)$ elde edilir.

Sonuç olarak, $\forall k \in \mathbb{N}$ ve $x \in \Omega$ için

$$f_{n_{k+1}}(x) - f(x) = \sum_{i=k+1}^{\infty}(f_{n_{i+1}}(x) - f_{n_i}(x))$$

olup

$$|f_{n_{k+1}}(x) - f(x)| \leq \sum_{i=k+1}^{\infty}|f_{n_{i+1}}(x) - f_{n_i}(x)| \leq \mathrm{g}(x)$$

ve

$$|f_{n_{k+1}}(x) - f(x)|^p \leq (\mathrm{g}(x))^p.$$

elde edilir. O halde Teorem 2.5.8 (Lebesgue Baskın Yakınsaklık Teoremi) den

$$\|f_{n_k} - f\|_{L^p} \to 0, \quad k \to \infty$$

olduğundan ispat tamamlanır. ■

3.2 Zayıf Lebesgue Uzayı

Tanım 3.2.1 (Zayıf Lebesgue Uzayı) $1 \le p < \infty$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ölçülebilir bir fonksiyon ve

$$\|f\|_{WL^p} := \sup_{\lambda > 0} \lambda |\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \lambda\}|^{\frac{1}{p}}$$

olmak üzere **zayıf Lebesgue uzayı** $WL^p(\mathbb{R}^n)$ aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$WL^p(\mathbb{R}^n) := \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : f - \text{ölçülebilir ve} \, \|f\|_{WL^p} < \infty\} \, .$$

dur. (**Sadosky, 1979**)

Uyarı 3.2.2 $1 \le p < \infty$ için $L^p(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow WL^p(\mathbb{R}^n)$ dir. Ayrıca

$$\|f\|_{WL^p} \le \|f\|_{L^p}$$

eşitsizliği sağlanır. (**Sadosky, 1979**)

Tanım 3.2.3 $1 \le p < \infty$ olmak üzere, $\mathbb{R}^n$ nin her bir kompakt K alt kümesi için sırasıyla $f\chi_K \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ve $f\chi_K \in WL^p(\mathbb{R}^n)$ şartlarını sağlayan tüm ölçülebilir f fonksiyonlarının uzayı $L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ ve $WL^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ ile gösterilir. Burada χ_K, K kümesinin karakteristik fonksiyonunu göstermektedir.

Özel olarak $p = 1$ yani $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ ise f fonksiyonu lokal integrallenebilirdir denir.

$$L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) := \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}; \textit{ölçülebilir} : \forall K \subset \mathbb{R}^n - \textit{kompakt} \;\; \textit{ve} \;\; \int\limits_K |f(x)|dx < \infty\}.$$

(**Grafakos, 2004**)

Aşağıdaki teoremi ispatsız olarak verelim.

Teorem 3.2.4 Her $f \in L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ için

$$\lim_{r \to 0} \frac{\|f\chi_{B(x,r)}\|_{L^p}}{\|\chi_{B(x,r)}\|_{L^p}} = |f(x)|, \quad h.h. \; x \in \mathbb{R}^n$$

eşitliği gerçeklenir. (**Grafakos, 2004**)

3.3 (p,q) Tipli Operatör

Tanım 3.3.1 (**(p,q) tipli operatör**) T bir quasi-lineer operatör ve $1 \leq p,q \leq \infty$ olsun. Eğer T operatörü $L^p(\mathbb{R}^n)$ uzayından $WL^q(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlı ise zayıf (p,q) tipindendir denir. Yani her bir $\lambda > 0$ ve $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ için

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : |Tf(x)| > \lambda\}| \leq \left(\frac{C}{\lambda}\|f\|_{L^p}\right)^q$$

olacak şekilde bir $C > 0$ sabiti var ise T operatörü zayıf (p,q) tipindendir.

Eğer T operatörü $L^p(\mathbb{R}^n)$ uzayından $L^q(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlı ise güçlü (p,q) tipindendir denir. Yani her $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ için

$$\|Tf\|_{L^q} \leq C\|f\|_{L^p}$$

olacak şekilde bir $C > 0$ sabiti var ise T operatörü güçlü (p,q) tipindendir.
(**Pick, Kufner ve ark. 2012**)

Uyarı 3.3.2 Her güçlü (p,q) tipli operatör aynı zamanda zayıf (p,q) tipli operatördür . (**Pick, Kufner ve ark. 2012**)

4 HARMONİK ANALİZİN KLASİK İNTEGRAL OPERATÖRLERİ

Bu bölümde, harmonik analizde önemli yer tutan maksimal operatörleri, Riesz potansiyeli ve singüler integral operatörlerinin $L^p(\mathbb{R}^n)$ uzayındaki sınırlılıklarını inceleyeceğiz.

4.1 Hardy-Littlewood Maksimal Operatörünün $L^p(\mathbb{R}^n)$ uzayında sınırlılığı

Harmonik analizde çok önemli bir yeri olan Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonunun tanımını vererek başlayalım.

Tanım 4.1.1 (Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonu) Her bir $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ ve $x \in \mathbb{R}^n$ için f nin Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonu

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{r^n} \int\limits_{|y|\leq r} |f(x-y)|dy \tag{4.1}$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca, $M : f \to Mf$ ye Hardy-Littlewood maximal operatorü de denir.

$Q(x,r)$, x merkezli ve kenar uzunluğu r olan küp olmak üzere maksimal fonksiyonlar, bazen aşağıdaki gibide tanımlanabilir.
$f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ ve $x \in \mathbb{R}^n$ için

$$M'f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|Q|} \int\limits_{Q(x,r)} |f(y)|dy,$$

$|E|$, E nin Lebesgue ölçüsü olmak üzere

$$M''f(x) = \sup_{x\in E} \frac{1}{|E|} \int\limits_{E} |f(y)|dy \tag{4.2}$$

şeklinde daha genel olarak tanımlanabilir. Burada supremum x i içeren bütün Q küpler veya yuvarlar üzerine uygulanmıştır. (**Sadosky, 1979**)

Hardy-Littlewood maksimal operatorü M için aşağıdaki uyarıları verelim.

Uyarı 4.1.2 (4.1) ve (4.2) ifadelerinden her bir $x \in \mathbb{R}^n$ ve $C_i(i = 1, 2, 3)$ sabitlerinin için yalnızca n boyutta olmak üzere aşağıdaki eşitsizlik kolayca görülebilir

$$C_0 Mf(x) \le C_1 M'f(x) \le C_2 M''f(x) \le C_3 Mf(x). \tag{4.3}$$

Böylelikle, f fonksiyonunun Mf-Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonu ve $M'f$, $M''f$ maksimal fonksiyonları sabit farkıyla birbirlerine denktir. (**Sadosky, 1979**)

Uyarı 4.1.3 $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ için $\mathbb{R}^n$ üzerinde Mf Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonu alt yarı sürekli bir fonksiyon ve aynı zamanda ölçülebilir bir fonksiyondur. (**Stein, 1969**)

(4.3)'den, sadece $M'f(x)$ için önermeyi göstermemiz yeterlidir. Aslında, her bir $\lambda \in \mathbb{R}$, için $E := \{x \in \mathbb{R}^n : M'f(x) \le \lambda\}$ kümesinin açık olduğunu göstermemiz de ispatın tamamlanması için yeterlidir. $M'f(x)$ tanımlanışından bütün $\lambda > 0$ için E nin açık olduğunu göstermek yeterli olacaktır. Denk olarak, her $\lambda > 0$ için $E^c := \{x \in \mathbb{R}^n : M'f(x) \le \lambda\}$ kümesinin kapalı olduğunu gösterelim.

Kabul edelim ki $x_k \subset E^c$ ve $k \to \infty$ için $x_k \to x$ olsun. Sadece $r > 0$ için

$$\frac{1}{|Q(x,r)|} \int\limits_{Q(x,r)} |f(y)| dy \le \lambda \tag{4.4}$$

olduğunu göstermemiz yeterlidir.

Buradan her $k = 1, 2, ...,$ için $Q_k{=}Q(x_k, r)$ ve $f_k(y) = f(y)\, \chi_{Q(x,r)\Delta Q_k}(y)$ denirse

$$Q(x,r)\,\Delta Q_k = (Q(x,r) \backslash Q_k) \bigcup (Q_k \backslash Q(x,r))$$

olur. Böylece,

$$\forall k \ \text{ için } \ |f_k(y)| \le |f(y)| \quad \lim_{k\to\infty} f_k(y) = 0$$

olur. Lebesgue baskın yakınsaklık teoremini uygulanırsa, aşağıdaki denklemi elde ederiz.

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{|Q(x,r)|} \int\limits_{Q(x,r)} |f_k(y)| dy = 0 \tag{4.5}$$

dır. Diğer taraftan,

$$\frac{1}{|Q(x,r)|}\int\limits_{Q_k(x,r)}|f(y)|dy=\frac{1}{|Q_k(x,r)|}\int\limits_{Q_k(x,r)}|f(y)|dy\le\lambda$$

olduğu açıktır. Buradan

$$\begin{aligned}\frac{1}{|Q(x,r)|}\int\limits_{Q(x,r)}|f(y)|dy &\le \frac{1}{|Q(x,r)|}\int\limits_{Q(x,r)\Delta Q_k}|f(y)|dy \\ &+\frac{1}{|Q(x,r)|}\int_{Q_k(x,r)}|f(y)|dy \\ &\le \frac{1}{|Q(x,r)|}\int\limits_{Q(x,r)}|f_k(y)|dy+\lambda\end{aligned}$$

$k\to 1$ için (4.10) dan (4.9) i elde ederiz.

Uyarı 4.1.4 M Hardy-Littlewood Maksimal operatörü, $L^1(\mathbb{R}^n)$ den $L^1(\mathbb{R}^n)$ e sınırlı bir operatör değildir. (**Stein, 1969**)

$n=1$ durmunu ele alalım. $f(x)=\chi_{[0,1]}(x)$ olsun ve $x\le 1$ için

$$Mf(x)\ge\frac{1}{2x}\int\limits_0^{2x}|f(y)|dy=\frac{1}{2x}$$

dır. Buradan

$$\int\limits_{\mathbb{R}}Mf(x)\,dx\ge\int\limits_1^{\infty}Mf(x)\,dx\ge\int\limits_1^{\infty}\frac{1}{2x}dx=\infty$$

dır. M, $L^1(\mathbb{R}^n)$ de sınırlı bir operator olmamasına rağmen , $WL^1(\mathbb{R}^n)$ uzayı için $L^1(\mathbb{R}^n)$ den $L^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$ e tanımlandığı zaman M operatörü sınırlı bir operatördür.

Lemma 4.1.5 (Vitali örtme lemması) E, $\mathbb{R}^n$ de ölçülebilir küme ve $\mathcal{B}$, $d(B)<\infty$ olan ve E yi Vitali anlamında örten B kümelerinin bir kolleksiyonu olsun. Herhangi bir $x\in E$ için $x\in B_x$ olmak üzere $B_x\in\mathcal{B}$ var ise $\beta>0$, n sadece boyuta bağlı ve $B_1,B_2,...,B_k,...$, $\mathcal{B}$ de ayrık yuvarlar olmak üzere

$$\sum_k|B_k|\ge\beta|E|$$

eşitsizliği sağlanır.

Burada lemma'nın ispatında da görüleceği gibi $\beta = 5^{-n}$ seçmek yeterlidir. (**Stein, 1969**)

İspat. $l_0 = \sup\{d(B) : B \in \mathcal{B} < \infty\}$ ve $B_1 \in \mathcal{B}$ olacak şekilde seçilsin. $d(B_1) \geq \frac{1}{2} l_0$ olsun. Benzer şekilde

$$\mathcal{B}_1 = \{B : \ B \in \mathcal{B} \text{ ve } B \bigcap B_1 = \emptyset\}$$

ve

$$l_1 = \sup\{d(B) : B \in \mathcal{B}_1\};$$

$B_2 \in \mathcal{B}_1$ için $d(B_2) = \frac{1}{2} l_1$ seçilebilir.

$B_1, B_2, ..., B_k$, $\mathcal{B}$ den olmak üzere yukarıdaki gibi kümeler seçilsin.

$$\mathcal{B}_k = \left\{ B : \ B \ \in \mathcal{B} \text{ ve } B \bigcap \left(\bigcup_{j=1}^{k} B_j \right) = \phi \right\}$$

olur ve

$$l_k = \sup\{d(B) : B \in \mathcal{B}_k\}.$$

Daha sonra $B_{k+1} \in \mathcal{B}_k$, $d(B_{k+1}) \geq \frac{1}{2} l_k$ olacak şekilde seçilebilir. Böylece $\mathcal{B}$ den $B_1, B_2, ...,$ dizisini aşağıdaki özellikleri sağlayacak şekilde seçilmiş olur.

(i) $B_1, B_2, \ldots, B_k, \ldots$ ayrık;

(ii) $d(B_{k+1}) \geq \frac{1}{2} \sup\{d(B) : B \in \mathcal{B}_k\}$ ve

$$\mathcal{B}_k = \left\{ B : B \in \mathcal{B} \ \ ve \quad B \bigcap \left(\bigcup_{j=1}^{k} B_j \right) = \phi \right\}, k = 1, 2, ... \ \text{ için}$$

dır.

Eğer bu şekildeki ilerleme bazı B_k kümeleri için sağlanmıyorsa bu $\mathcal{B}_k = \emptyset$ olduğunu gösterir. Bu durumda, her bir $x \in E$, $B_x \in \mathcal{B}$ vardır öyleki $1 \geq k_0 \geq k$ olmak üzere $x \in B_x$ ve $B_x \cap B_{k_0} = \emptyset$. Genelliği bozmadan, $B_x \cap B_j = \emptyset$, olduğu $j = 1, 2, ..., k_0 - 1$ için varsayılabilir. Bundan dolayı, $d(B_{k_0}) \geq \frac{1}{2} d(B_x)$ ve buradan $B_{\mathcal{X}} \subset 5B_{k_0}$ dır. Burada $5B_{k_0}$ için B_{k_0} yuvarını merkezi aynı kalacak şekilde beş kat genişlettiği (uzattığı) söylenir. Buradan, $E \subset \bigcup\limits_{j=1}^{k} 5B_j$ için

$$|E| \leq \left|\bigcup_{j=1}^{k} 5B_j\right| \leq \sum_{j=1}^{k} |5B_j| \leq 5^n \sum_{j=1}^{k} |B_j|$$

olduğu görülmektedir. Diğer taraftan, $\sum\limits_{j=1}^{\infty} |B_k| = \infty$ olduğu açıktır. O halde, lemma'nın ispatını tamamlamak için

$$B_k^* = 5B_k$$

olmak üzere

$$\sum_{j=1}^{\infty} |B_k| < \infty$$

olduğunu göstermek yeterlidir. Burada

$$E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k^* \tag{4.6}$$

olması için $B \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_k^*$ ispatlanması yeterlidir. Her bir $B \in \mathcal{B}$ için $\sum\limits_{j=1}^{\infty} |B_k| < \infty$, ve $d(B_k) \to 0$, $k \to \infty$ olduğunu elde ederiz. Burada, $d(B_{k_0}) < \frac{1}{2} d(B)$ olacak şekilde en az bir k_0 sayısı vardır. Buradaki k_0 sayısı bu özelliği sağlayan en küçük indis olarak ele alınması yeterlidir. Bu durumda, B_k, $1 \leq j \leq k_0 - 1$ için B_j yuvarları ile kesişir. Diğer taraftan da

$$d\left(B_{k_0}\right) \geq \frac{1}{2} d\left(B_k\right)$$

dır. (4.6) ifadesi ve $B_k \subset 5B_j = B_j^*$ den

$$|E| \leq |\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k^*| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |B_k^*| \leq 5^n \sum_{k=1}^{\infty} |B_k|$$

olup ispat tamamlanır. ■

M Hardy-Littlewood maksimal operatörünün, zayıf $(1,1)$ tipinden ve zayıf (p,q) tipinden olduğunu gösteren teorem aşağıda ifade edilmiştir.

Teorem 4.1.6 f, $\mathbb{R}^n$ üzerinde ölçülebilir fonksiyon olsun.

(a) $1 \leq p \leq \infty$ için $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ise hemen her $x \in \mathbb{R}^n$ için

$$Mf(x) < \infty$$

olur.

(b) Herhangi bir $\lambda > 0$ ve $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ için

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : |Mf(x)| > \lambda\}| \leq \frac{C}{\lambda}\|f\|_{L^1}$$

olacak şekilde bir $C = C(n) > 0$ sabiti vardır.

(c) Herhangi bir $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ve $1 < p \leq \infty$ için

$$\|Mf\|_{L^p} \leq C\|f\|_{L^p}$$

olacak şekilde bir $C = C(n,p) > 0$ sabiti vardır. (**Sadosky, 1979**)

İspat. Açıkça görülüyor ki; (a) şıkkı (b) ve (c) şıklarının sonucudur. Dolayısıyla sadece (b) ve (c) şıklarını ispatlamak yeterlidir.

(b) nin ispatı: Her bir $\lambda > 0$ için Uyarı 4.1.2 den

$$E_\lambda := \{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \lambda\}$$

kümesinin açık ve ölçülebilir küme olduğu görülmektedir. Tanım 4.1.1 den $x \in E_\lambda$ için x merkezli B_x yuvarı vardır öyleki

$$\frac{1}{|B_x|}\int_{B_x} |f(y)|dy > \lambda$$

dır. Buradan $\forall x \in E_\lambda$ için

$$|B_x|\frac{1}{\lambda}\int_{B_x} |f(y)|dy \leq \frac{1}{\lambda}\|f\|_{L^1} < \infty$$

dir.

Böylece, $\mathcal{B} = \{B_x : x \in E_\lambda\}$ şeklinde olursa E_λ kümeleri $\mathcal{B}$ yi Vitali amlamında örter. Lemma 4.1.5 den, $B_1, B_2, ..., B_k, ...$ kümeleri $\mathcal{B}$ kolleksiyonunun ayrık kümeleri şeklinde seçilebilir,

$$\sum_k |B_k| \geq \beta|E_\lambda|$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned}\beta|E_\lambda| &\leq \sum_k |B_k| \\ &\leq \frac{1}{\lambda}\sum_k \int\limits_{B_k} |f(y)|dy \\ &= \frac{1}{\lambda} \int\limits_{\cup_k B_k} |f(y)|dy \\ &\leq \frac{1}{\lambda}\|f\|_{L^1}\end{aligned}$$

elde edilir.

(c) nin ispatı: Açıkça görülüyor ki $p=\infty$ için (c) sağlanır. O halde $1<p<\infty$ olsun. $f \in L^p(R^n)$ ve her bir $\lambda>0$ için $f=f_1+f_2$ olsun.

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x) \ , & \text{için} \ \ |f(x)| \geq \frac{\lambda}{2} \\ 0 \ , & \text{için} \ \ |f(x)| < \frac{\lambda}{2} \end{cases}.$$

$f_1 \in L^1(R^n)$ olduğunu görmek kolaydır. Buradan

$$|f(x)| \leq |f_1(x)| + \frac{\lambda}{2} \quad \text{ve} \quad Mf(x) \leq Mf_1(x) + \frac{\lambda}{2}$$

elde edilir. Böylece, (4.14) dan zayıf $(1,1)$ tipi için M sınırlıdır.

$$\begin{aligned}|E_\lambda| &= |\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \lambda\}| \\ &\leq |\{x \in \mathbb{R}^n : Mf_1(x) > \frac{\lambda}{2}\}| \\ &\leq \frac{2\beta}{\lambda}\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f_1(x)|dx \\ &= \frac{2\beta}{\lambda} \int\limits_{\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| \geq \frac{\lambda}{2}\}} |f(x)|dx,\end{aligned}$$

burada β Lemma 4.1.5 de olduğu gibi bir sabittir. Böylece

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathbb{R}^n} (Mf(x))^p \, dx &= p \int\limits_0^\infty \lambda^{p-1} |E_\lambda| d\lambda \\
&\leq p \int\limits_0^\infty \lambda^{p-1} \left(\frac{2\beta}{\lambda} | \int\limits_{\{x \ \epsilon \mathbb{R}^n : |f(x)| \geq \frac{\lambda}{2}\}} |f(x)| dx \right) d\lambda \\
&\leq 2\beta p \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \left(\int\limits_0^{2|f(x)|} \lambda^{p-2} d\lambda \right) dx \\
&= \frac{2\beta p}{p-1} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx
\end{aligned}$$

olur. Böylece Theorem 4.1.6 ispatlanmış olur. ∎

Zayıf $(1,1)$ tipi için M Hardy-Littlewood maksimal operatörünün sınırlılığı için Lebesgue diferensiyelleme teoremi aşağıdaki gibidir.

Teorem 4.1.7 (Lebesgue diferensiyelleme teoremi) $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ olsun. $B(x,r)$ üzerinde

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int\limits_{B(x,r)} f(y) \, dy = f(x), \quad \text{h.h. } x \in \mathbb{R}^n$$

dir. (**Sadosky, 1979**)

İspat. Herbir $R > 0$ ve $f\chi_{B(0,R)} \in L^1(R^n)$ için

$$L_r(f)(x) = \frac{1}{|B(x,r)|} \int\limits_{B(x,r)} f(y) \, dy$$

ve

$$\Lambda(f)(x) = \overline{\lim_{r \to 0}} L_r(f)(x) - \underline{\lim_{r \to 0}} L_r(f)(x)$$

olup buradan

$$\Lambda(f)(x) \leq 2 \sup_{r>0} |L_r(f)(x)| = 2Mf(x)$$

elde edilir.

Her bir $\lambda > 0$ için

$$|E_\lambda(\Lambda f)| := |\{x \ \in \ \mathbb{R}^n \ : \Lambda(f)(x) \ > \ \lambda\}| = 0 \tag{4.7}$$

olduğunu gösterelim. Her $\varepsilon > 0$ için $f = \mathrm{g}+h$ şeklinde yazabiliriz, burada g kompakt destekleyeni ile birlikte sürekli bir fonksiyon ve $\|h\|_1 < \varepsilon$ dir. Böylece

$$\Lambda(f)(x) \leq \Lambda(\mathrm{g})(x) + \Lambda(h)(x) = \Lambda(h)(x)$$

ve

$$|E_\lambda(\Lambda f)| \leq |E_\lambda(\Lambda h)| \leq |E_{\frac{\lambda}{2}}(Mh)|$$

olduğu görülür. Theorem 4.1.6 (b) den,

$$|E_\lambda(\Lambda f)| \leq \frac{2C}{\lambda}\|h\|_{L^1} < \frac{2C\varepsilon}{\lambda}$$

elde edilir. Buradan, keyfi ε için (4.7) görülür ve (4.7) ifadeside

$$\lim_{r\to 0} L_r(f)(x)$$

limitinin h.h. $x \in \mathbb{R}^n$ için var olduğunu gösterir. Diğer taraftan, integralin sürekliliğini kullanarak,

$$\begin{aligned}
\lim_{r\to 0}\|L_r(f) - f\|_{L^1} &= \lim_{r\to 0}\int_{\mathbb{R}^n}\left|\frac{1}{B(x,r)}\int_{B(x,r)} f(y)\,dy - f(x)\right| dx \\
&= \lim_{r\to 0}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{|B(0,r)|}\left|\int_{B(0,r)}[f(x-y) - f(x)]\,dy\right| dx \\
&\leq \lim_{r\to 0}\frac{1}{|B(0,r)|}\int_{B(0,r)}\int_{\mathbb{R}^n}|f(x-y) - f(x)|\,dx\;dy = 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece, en az bir r_k alt dizisi vardır ki $k \to \infty$ için $r_k \to 0$

$$\lim_{k\to\infty} L_{r_k}(f)(x) = f(x) \quad h.h. \;\; x \in \mathbb{R}^n.$$

Çünkü $\lim\limits_{k\to\infty} L_{r_k}(f)(x)$ var olduğunda h.h. $x \in \mathbb{R}^n$, buradan

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} f(y)\,dy = f(x), \quad h.h. \;\; x \in \mathbb{R}^n$$

dır. Böylece ispat tamamlanmış olur ■

Uyarı 4.1.8 (4.1) ve (4.2) tanımlarının denkliğinden açıkça görülmektedir ki, Teorem 4.1.7 nin sonuçları için $B(x,r)$ yerine x i içeren $Q(x,r)$ kübü alınması mümkündür. (**Sadosky, 1979**)

4.2 Riesz Potansiyelinin $L^p(\mathbb{R}^n)$ Uzayında Sınırlılığı

f yeterince düzgün bir fonksiyon olmak üzere f fonksiyonunun Laplasyeni;

$$\Delta f = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}$$

biçiminde tanımlanır.

$f \in S$ olmak üzere

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i(xy)} \hat{f}(y) dy$$

dir. $e^{i(xy)} = e^{i(x_1y_1+...+x_ny_n)}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} (-\Delta) f(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(-\Delta e^{i(xy)}\right) \hat{f}(y) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(-\frac{\partial}{\partial x_1^2} e^{ix_1y_1} - \frac{\partial}{\partial x_2^2} e^{ix_2y_2} - ... + \frac{\partial}{\partial x_n^2} e^{ix_ny_n} \right) \hat{f}(y) dy \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |y|^2 e^{i(xy)} \hat{f}(y) dy \end{aligned}$$

olur. $F = \hat{f}$ olmak üzere

$$I_\alpha f = F^{-1} |y|^{-\alpha} F f, \qquad f \in S \tag{4.8}$$

olduğundan

$$\Rightarrow (-\Delta) f = F^{-1} |y|^2 F f$$

yazılabilir. Bilindiği gibi Laplace operatörü eliptik operatördür. R. Seeley(**Seeley, 1980**) göstermiştir ki eğer bir eliptik L operatörü için

$$L = F^{-1} \phi F$$

formülü mevcut ise o zaman onun istenilen kompleks kuvveti için

$$L^z f = (F^{-1} \phi^z F) f$$

geçerlidir. Dolayısıyla bu teoreme göre Laplace operatörü için

$$(-\Delta)^z f = (F^{-1} |y|^{2z} F) f$$

yazılabilir. Dolayısıyla görünür ki $z = -\frac{\alpha}{2}$ için

$$(-\Delta)^{-\frac{\alpha}{2}} f = (F^{-1} |y|^{-\alpha} F) f \tag{4.9}$$

geçerlidir. Yani (4.3) ve (4.9) den görünür ki Riesz potansiyelinin ve $-\Delta$ nın negatif kesir kuvvetinin genelleşmiş anlamda Fourier dönüşümleri aynıdır. Bu durumda

$$I_\alpha = (-\Delta)^{-\frac{\alpha}{2}} \quad , \quad 0 < \alpha < n \tag{4.10}$$

ifadesi yazılabilir. (4.10) formülü Riesz potansiyelinin önemli bir operatör olduğunu gösterir. Çünkü (4.9) in yardımıyla Laplace operatörünün negatif kesir kuvvetleri tanımlanabilir, burada $0 < \alpha < n$ ve

$$\gamma(\alpha) = \pi^{\frac{n}{2}} 2^\alpha \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)}$$

olmak üzere

$$(I_\alpha f)(x) = \frac{1}{\gamma(\alpha)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy$$

I_α operatörüne Riesz potansiyeli denir.

Teorem 4.2.1 (Riesz Potansiyeli İçin Hardy-Littlewood-Sobolev Teoremi)

$o < \alpha < n$, $1 \le p < q < \infty$ ve $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ olsun.

(i) Eğer $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ise

$$(I_\alpha f)(x) = \frac{1}{\gamma(\alpha)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |x-y|^{-n+\alpha} f(y) dy$$

integrali hemen her x için mutlak yakınsaktır.

(ii) Eğer $p > 1$ ise bu durumda

$$\|I_\alpha f\|_{L^q} \leq A_{p,q}\|f\|_{L^p}$$

eşitsizliği gerçeklenir.

(iii) Eğer $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ise bu durumda her $\lambda > 0$ için

$$m\{x : |I_\alpha f(x)| > \lambda\} \leq \left(\frac{A\|f\|_{L^1}}{\lambda}\right)^q$$

dir. Yani, $f \to I_\alpha f$ dönüşümü $(1, q)$ zayıf tiptir $\left(\frac{1}{q} = 1 - \frac{\alpha}{n}\right)$.

(**Lu, Ding ve Yan 2006**)

İspat. $K(x) = \frac{1}{|x|^{n-\alpha}}$ olsun. $f \to I_\alpha * f$ dönüşümü yerine $f \to K * f$ dönüşümünü göz önüne alalım (iki dönüşüm arasında bir sabitle$\left(\frac{1}{\gamma(\alpha)}\right)$ çarpım kadar fark vardır). K yı μ herhangi bir pozitif sabit olmak üzere

$$K_1(x) = \begin{cases} K(x) \ , \ |x| \leq \mu \\ 0 \ \ \ \ , \ |x| > \mu \end{cases} \qquad K_2(x) = \begin{cases} K(x) \ , \ |x| > \mu \\ 0 \ \ \ \ , \ |x| \leq \mu \end{cases}$$

olacak biçimde $K_1 + K_2$ olarak ayrıştıralım. Buradan

$$K * f = K_1 * f + K_2 * f$$

elde edilir. $K_1 * f$ ve $K_2 * f$ nin h.h. x için mutlak yakınsak olduğu gösterilirse $K * f$ nin h.h. x için mutlak yakınsak olduğu, dolayısıyla $I_\alpha f$ nin h.h. x için mutlak yakınsak olduğu gösterilmiş olur.

$$(K_1 * f)(x) = \int\limits_{|x| \leq \mu} K_1(x-t) f(t) dt = \int\limits_{|x| \leq \mu} \frac{f(t)}{|x-t|^{n-\alpha}} dt$$

için Young Teoreminden;

$$\begin{aligned} \|K_1 * f\|_{L^p} &\leq \|f\|_{L^p} \int\limits_{|x| \leq \mu} \frac{1}{|x-t|^{n-\alpha}} dt \\ &= \|f\|_{L^p} w_{n-1} \int\limits_0^\mu \rho^{\alpha-1} d\rho \\ &= \|f\|_{L^p} w_{n-1} \frac{\mu^\alpha}{\alpha} < \infty \end{aligned}$$

bulunur. Buradan $K_1 * f$, h.h. x için mutlak yakınsaktır.

$$(K_2 * f)(x) = \int\limits_{|x|>\mu} K_2(x-t) f(t)dt = \int\limits_{|x|>\mu} \frac{f(t)}{|x-t|^{n-\alpha}} dt$$

dir. $p^{'}$, p nin duali olsun, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^{'}} = 1$ olduğundan ve Hölder eşitsizliğinden

$$(K_2 * f)(x) = \int\limits_{|x|>\mu} \frac{f(t)}{|x-t|^{n-\alpha}} dt \leq \left[\int\limits_{|x|>\mu} \frac{1}{\left(|x-t|^{n-\alpha}\right)^{p^{'}}} dt \right]^{\frac{1}{p^{'}}} \|f\|_{L^p}$$

elde edilir. Köşeli parantez içindeki integralin yakınsak olması için $(n-\alpha) p^{'} > n$ olması gerekir.

$$\begin{aligned}
(n-\alpha) p^{'} &= n\left(1 - \frac{\alpha}{n}\right) p^{'} = n\left(1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) p^{'} = n\left(\frac{1}{p^{'}} + \frac{1}{q}\right) p^{'} = n\left(1 + \frac{p^{'}}{q}\right) > n \\
&= \|f\|_{L^p} \left(w_{n-1} \int\limits_{\mu}^{\infty} \frac{\rho^{n-1}}{\rho^{(n-\alpha)p^{,}}} d\rho \right)^{\frac{1}{p^{'}}} = \|f\|_{L^p} \left(c^{'} w_{n-1} \mu^{n-(n-\alpha)p^{'}} \right)^{\frac{1}{p^{'}}} \\
&\quad \left\{ \frac{n}{p^{'}} - (n-\alpha) = n\left(\frac{1}{p^{'}} - 1 + \frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) = \frac{-n}{q} \right\} \\
&\leq c_1 \|f\|_{L^p} \mu^{-\frac{n}{q}}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|K_2 * f\|_{L^1} \leq c_1 \|f\|_{L^p} \mu^{-\frac{n}{q}}$$

$\Rightarrow \|K_2 * f\|_{L^1} < \infty$ olup

$K_2 * f$ h.h. x için mutlak yakınsaktır. O halde

$K * f = K_1 * f + K_2 * f$ olduğundan

$K * f$ h.h. x için mutlak yakınsaktır.

Böylece $I_\alpha f$ nin h.h. x için mutlak yakınsak olduğu elde edilir. Dolayısıyla teoremin (i) ifadesi ispatlanmış olur.

Şimdi (iii) yi ispatlayalım:

$$\begin{aligned}
(I_\alpha f)(x) &= \frac{1}{\gamma(\alpha)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy \qquad (y \to x+y) \qquad (4.11)\\
&= \frac{1}{\gamma(\alpha)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{f(x+y)}{|y|^{n-\alpha}} dy \\
&= \frac{1}{\gamma(\alpha)} \int\limits_{|y|\leq\alpha} \frac{f(x+y)}{|y|^{n-\alpha}} dy + \frac{1}{\gamma(\alpha)} \int\limits_{|y|>\alpha} \frac{f(x+y)}{|y|^{n-\alpha}} dy \\
&= (I_{\alpha_1} f)(x) + (I_{\alpha_2} f)(x)
\end{aligned}$$

elde edilir. (4.11) ifadesinden

$$\{x : |(I_\alpha f)(x)| > 2\lambda\} \subset \{x : |(I_{\alpha_1} f)(x)| > \lambda\} \cup \{x : |(I_{\alpha_2} f)(x)| > \lambda\}$$

gerçeklenir. O halde yukarıdaki kümenin ölçüsü

$$|\{x : |(I_\alpha f)(x)| > 2\lambda\}| \leq |\{x : |(I_{\alpha_1} f)(x)| > \lambda\}| + |\{x : |(I_{\alpha_2} f)(x)| > \lambda\}| \qquad (4.12)$$

şeklindedir. Şimdi bu ifadeleri ayrı ayrı hesaplayalım:

$$\begin{aligned}
|\{x : |(I_{\alpha_1} f)(x)| > \lambda\}| &= \int\limits_{|\{x:|(I_{\alpha_1} f)(x)|>\lambda\}|} 1^p dx \\
&\leq \int\limits_{|\{x:|(I_{\alpha_1} f)(x)|>\lambda\}|} \left| \frac{(I_{\alpha_1} f)(x)}{\lambda} \right|^p dx \\
&\leq \frac{1}{\lambda^p} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |(I_{\alpha_1} f)(x)|^p dx \\
&= \frac{1}{\lambda^p} \|I_{\alpha_1} f\|_{L^p}^p
\end{aligned}$$

elde edilir. Young teoreminden

$$|\{x : |(I_{\alpha_1} f)(x)| > \lambda\}| \leq \frac{1}{\lambda^p} \|I_{\alpha_1} f\|_{L^p}^p = \frac{1}{\lambda^p} A^p \|K_1 * f\|_{L^p}^p \leq \frac{A^P}{\lambda^P} \|K_1\|_{L^1}^p \|f\|_{L^p}^p$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned}
\|K_1\|_{L^1}^p &= \left(\int\limits_{|x|\le\mu} \frac{1}{|x|^{n-\alpha}}dx\right)^p = \left(\int\limits_{S^{n-1}}\int\limits_0^\mu \frac{\rho^{n-1}}{\rho^{n-\alpha}}d\rho dx'\right)^p \\
&= \left(w_{n-1}\int\limits_0^\mu \rho^{\alpha-1}d\rho\right)^p = \left(w_{n-1}\frac{\rho^\alpha}{\alpha}\,\Big|_0^\mu\right)^p \\
&= \frac{w_{n-1}^p}{\alpha^p}\mu^{\alpha p} = c^p\mu^{\alpha p}.
\end{aligned} \tag{4.13}$$

$$|\{x : |(I_{\alpha_1}f)(x)| > \lambda\}| \le \frac{c_1\mu^{\alpha p}}{\lambda^p}\|f\|_{L^p}^p = c_1\left(\frac{\mu^\alpha}{\lambda}\|f\|_{L^p}\right)^p$$

elde edilir. Ayrıca Hölder eşitsizliğinden

$$|\{x : |(I_{\alpha_2}f)(x)| > \lambda\}| \le \frac{A'}{\lambda}\|K_2\|_{L^{p'}}\|f\|_{L^p}$$

eşitsizliği gerçeklenir.

$$\|K_2\|_{L^{p'}} = \left(\int\limits_{|x|>\mu} \frac{1}{\left(|x|^{n-\alpha}\right)^{L^{p'}}}dx\right)^{\frac{1}{p'}} = c_2\mu^{-\frac{n}{q}}$$

olduğundan ve

$$\|K_2\|_{L^{p'}}\|f\|_{L^p} = c_2\mu^{-\frac{n}{q}}\|f\|_{L^p} = \lambda$$

seçilirse $\|K_2 * f\|_{L^1} \le \lambda$ ve böylece $|\{x : |K_2 * f| > \lambda\}| = 0$ elde edilir.

$$\mu^{-\frac{n}{q}} = \frac{\lambda}{c_2\|f\|_{L^p}} \Rightarrow \mu = \left(\frac{c_2\|f\|_{L^p}}{\lambda}\right)^{\frac{q}{n}}. \tag{4.14}$$

(4.11), (4.12), (4.13) den ve (4.12) de μ nun yerine (4.14) daki ifadesi yazılırsa

$$\begin{aligned}
|\{x : |(I_\alpha f)(x)| > 2\lambda\}| &\le c_1\left(\frac{\|f\|_{L^p}}{\lambda}\left(\frac{c_2\|f\|_{L^p}}{\lambda}\right)^{\frac{q\alpha}{n}}\right)^p \\
&= c_{p,q}\frac{\|f\|_{L^p}^p}{\lambda^p}\left(\frac{\|f\|_{L^p}}{\lambda}\right)^{\frac{q\alpha p}{n}} \\
&\quad \left(\frac{\alpha}{n} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q} \Rightarrow \frac{\alpha qp}{n} = q - p \text{ olduğundan}\right) \\
&= c_{p,q}\frac{\|f\|_{L^p}^p}{\lambda^p}\left(\frac{\|f\|_{L^p}}{\lambda}\right)^{q-p} = c_{p,q}\left(\frac{\|f\|_{L^p}}{\lambda}\right)^q
\end{aligned}$$

bulunur. Yukarıdaki ifadede $p = 1$ için $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ alındığında $I_\alpha f$ Riesz potansiyeli $\frac{1}{q} = 1 - \frac{\alpha}{n}$ olmak üzere zayıf $(1, q)$ tipinde operatördür. Böylece (iii) ifadesi ispatlanmış olur.

Şimdi (ii) yi ispatlayalım. İspatı yaparken Marcinkiewicz interpolasyon Teoremi' nden yararlanacağız. (iii) den dolayı I_α zayıf $(1, q_0) = \left(1, \frac{1}{1-\frac{\alpha}{n}}\right)$ tipli operatördür. $(p_1, q_1) = \left(p_1, \frac{1}{\frac{1}{p_1} - \frac{\alpha}{n}}\right)$ tipli operatör, (p_0, p_1), (q_0, q_1) sayılarını Marcinkiewicz interpolasyon Teoremi'ne uygun olarak seçelim. I_α zayıf (p_0, q_o) ve (p_1, q_1) tipli

operatördür. Bu durumda Marcinkiewicz Teoremi' nden

$$0 < \theta < 1 \text{ ve } \frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \qquad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}$$

olmak üzere I_α kuvvetli (p, q) tipli operatördür.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{q} &= \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1} = (1-\theta)\left(1 - \frac{\alpha}{n}\right) + \theta\left(\frac{1}{p_1} - \frac{\alpha}{n}\right) \\
&= 1 - \frac{\alpha}{n} - \theta + \theta\frac{\alpha}{n} + \frac{\theta}{p_1} - \frac{\alpha}{n}\theta \\
&= 1 - \theta - \frac{\alpha}{n} + \frac{\theta}{p_1} \\
&\quad \left(\frac{1}{p} = 1 - \theta + \frac{\theta}{p_1} \text{ olduğundan}\right) \\
&= \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n} \text{ veya } \frac{\alpha}{n} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}
\end{aligned}$$

olduğundan Marcinkiewicz interpolasyon Teoremi' nden

$$\|I_\alpha f\|_{L^q} \leq c \|f\|_{L^p}, \qquad \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$$

elde edilir. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur. ∎

Önerme 4.2.2 $\alpha > 0$, $0 < \lambda \leq n$, $1 < p < \frac{\lambda}{p}$, $1 \leq q \leq \infty$, ve $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $M_{\frac{\lambda}{p}} f \in L^q(E)$, $E \subset \mathbb{R}^n$ olsun. Bu durumda

$$\|I_\alpha f\|_{L_r(E)} \leq C \left\| M_{\frac{\lambda}{p}} f \right\|_{L^q(E)}^{\frac{\alpha p}{\lambda}} \|f\|_{L^p}^{1-\frac{\alpha p}{\lambda}} \tag{4.15}$$

gerçeklenir, burada $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{p} + \frac{(\alpha p)}{(\lambda q)}$ ve C, f ve E den bağımsız bir sabittir. (**Adams, 1975**)

İspat. İspatı yaparken L.I. Hedberg'in (**Hedberg, 1972**) Riesz Potansiyelleri için uygulamış olduğu temel düşünceyi takip edeceğiz. Bu durumda $f \neq 0$ için, $I_\alpha f(x)$ kümesi $\delta > 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned} I_\alpha f(x) &= \int\limits_{|x-y|<\delta} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy + \int\limits_{|x-y|\geq\delta} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy \\ &= I + I^{'} \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir.

$k \in \mathbb{Z}$ ve $a_k(x) = \left\{ y : 2^k\delta \leq |x-y| < 2^{k+1}\delta \right\}$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_{|x-y|<\delta} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{a_{-k}(x)=\left\{y:2^{-k}\delta\leq|x-y|<2^{k+1}\delta\right\}} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy \end{aligned}$$

dir. Buradan

$$\begin{aligned} |I| &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{a_{-k(x)}} |x-y|^{\alpha-n} |f(y)|\, dy, \qquad 0 < \alpha < n \text{ olduğundan} \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \left(2^{-k}\delta\right)^{\alpha-n} \left(2^{-k+1}\delta\right)^{n} \frac{1}{\left(2^{-k+1}\delta\right)^{n}} \int\limits_{a_{-k(x)}} |f(y)|\, dy \\ &\left(M_\beta f(x) = \sup_{r\to 0} r^{\beta-n} \int\limits_{|x-y|<r} |f(y)|\, dy, \qquad 0 \leq \beta \leq n \text{ olduğundan} \right) \\ &\leq \delta^\alpha 2^n \sum_{k=1}^{\infty} \left(2^{-k}\right)^{\alpha-n+n} M_0 f(x) \\ &= \delta^\alpha 2^n \sum_{k=1}^{\infty} \left(2^{-k}\right)^{\alpha} M_0 f(x) \\ &= C\delta^\alpha M_0 f(x), \qquad 0 < \alpha < n \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned} I^{'}(x) &= \int\limits_{|x-y|>\delta} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \int\limits_{a_k(x)=\left\{y:2^k\delta\leq|x-y|<2^{k+1}\delta\right\}} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy \end{aligned}$$

dir. Buradan,

$$\begin{aligned}
\left|I'(x)\right| &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \int\limits_{a_k(x)} |x-y|^{\alpha-n} |f(y)|\, dy \\
&\leq \sum_{k=0}^{\infty} \left(2^k\delta\right)^{\alpha-n} \frac{\left(2^{k+1}\delta\right)^{n-\frac{\lambda}{p}}}{\left(2^{k+1}\delta\right)^{n-\frac{\lambda}{p}}} \int\limits_{a_k(x)} |f(y)|\, dy
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_\beta f(x) = \sup_{r\to 0} r^{\beta-n} \int\limits_{|x-y|<r} |f(y)|\, dy, &\quad 0 \leq \beta \leq n \text{ olduğundan} \\
&\leq \delta^{\alpha-\frac{\lambda}{p}} \sum_{k=0}^{\infty} \left(2^k\right)^{\alpha-n} \left(2^{k+1}\right)^{n-\frac{\lambda}{p}} M_{\frac{\lambda}{p}} f(x) \\
&= \delta^{\alpha-\frac{\lambda}{p}} \sum_{k=0}^{\infty} \left(2^{k\alpha-kn+kn-k\frac{\lambda}{p}+n-\frac{\lambda}{p}}\right) M_{\frac{\lambda}{p}} f(x) \\
&= \delta^{\alpha-\frac{\lambda}{p}} 2^{n-\frac{\lambda}{p}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{k\left(\alpha-\frac{\lambda}{p}\right)}\right) M_{\frac{\lambda}{p}} f(x) \\
&\quad \left(0<\alpha<n,\ 1<p<\frac{\lambda}{p} \text{ olduğundan } \left(\alpha-\frac{\lambda}{p}\right)<0\right) \\
&= C\delta^{\alpha-\frac{\lambda}{p}} M_{\frac{\lambda}{p}} f(x)
\end{aligned}$$

elde edilir.

$\delta = \delta(x) = \left[\frac{M_{\frac{\lambda}{p}} f(x)}{M_0 f(x)}\right]^{\frac{p}{\lambda}}$ seçilirse hipotezimiz gereği $\delta(x)$ sonlu ve h.h. yerde pozitiftir. Bu seçim kolayca,

$$\begin{aligned}
|I_\alpha f(x)| &\leq |I| + \left|I'\right| \\
&\leq C\delta^\alpha M_0 f(x) + C\delta^{\alpha-\frac{\lambda}{p}} M_{\frac{\lambda}{p}} f(x) \\
&= C\frac{\left(M_{\frac{\lambda}{p}} f(x)\right)^{\frac{\alpha p}{\lambda}}}{\left(M_0 f(x)\right)^{\frac{\alpha p-\lambda}{\lambda}}} + C\frac{\left(M_{\frac{\lambda}{p}} f(x)\right)^{\frac{\alpha p}{\lambda}}}{\left(M_0 f(x)\right)^{\frac{\alpha p}{\lambda}}} \frac{1}{\left(M_0 f(x)\right)^{-1}} \\
&= C\frac{\left(M_{\frac{\lambda}{p}} f(x)\right)^{\frac{\alpha p}{\lambda}}}{\left(M_0 f(x)\right)^{\frac{\alpha p-\lambda}{\lambda}}} + C\frac{\left(M_{\frac{\lambda}{p}} f(x)\right)^{\frac{\alpha p}{\lambda}}}{\left(M_0 f(x)\right)^{\frac{\alpha p-\lambda}{\lambda}}} \\
&= C\frac{\left(M_{\frac{\lambda}{p}} f(x)\right)^{\frac{\alpha p}{\lambda}}}{\left(M_0 f(x)\right)^{\frac{\alpha p}{\lambda}-1}} \\
&= C\left(M_{\frac{\lambda}{p}} f(x)\right)^{\frac{\alpha p}{\lambda}} \left(M_0 f(x)\right)^{1-\frac{\alpha p}{\lambda}}
\end{aligned}$$

olduğunu gösterir. Yani,

$$|I_\alpha f(x)| \leq C \left(M_{\frac{\lambda}{p}} f(x) \right)^{\frac{\alpha p}{\lambda}} (M_0 f(x))^{1-\frac{\alpha p}{\lambda}}$$

dir.

Teorem 3.1.1. deki (iii) özelliğinden ve Hölder eşitsizliğinden

$$\|I_\alpha f\|_{L^r(E)} \leq C \left\| M_{\frac{\lambda}{p}} f \right\|_{L^q(E)}^{\frac{\alpha p}{\lambda}} \|f\|_{L^p}^{1-\frac{\alpha p}{\lambda}}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu da ispatı tamamlar. ■

4.3 Singüler İntegral Operatörlerinin $L^p(\mathbb{R}^n)$ Uzayında Sınırlığı

Calderon-Zygmund singüler integral operatörü Hilbert ve Riesz dönüşümlerinin genelleştirmesidir. Hilbert dönüşümü eşlenik harmonik fonksiyonların üst yarı düzlemdeki sınır değer problemlerinin çalışmasında ortaya çıkmıştır. Riesz dönüşümü de ikinci mertebeden eliptik denklemlerin çözümlerinin düzgünlüğüne karşılık gelmektedir.

$f \in L^p(\mathbb{R})(1 \leq p < \infty)$ olmak üzere $\mathbb{R}$ üzerinde Cauchy integrali;

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{f(t)}{t-z} dt$$

ile tanımlanır, burada $z = x + iy, y > 0$ dir. F nin $\mathbb{R}^2_+$ üzerinde analitik olduğu görülür. Ayrıca;

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{y}{(x-t)^2 + y^2} + \frac{i}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{x-t}{(x-t)^2 + y^2} f(t) dt \\ &= \frac{1}{2} \Big[\left(P_y * f\right)(x) + i (Q_y * f)(x) \Big] \end{aligned}$$

yazılabilir, burada

$$P_y(t) := \frac{1}{\pi} \frac{1}{t^2 + y^2}$$

ifadesine Poisson çekirdeği ve

$$Q_y(t) := \frac{1}{\pi} \frac{t}{t^2 + y^2}$$

ifadesine de eşlenik Poisson çekirdeği denir. Ayrıca $P_y * f$ f fonksiyonunun Poisson integrali olarak ve $Q_y * f$ de f fonksiyonunun eşlenik Poisson integrali olarak adlandırılır. Harmonik fonksiyonların sınır değerlerinin özelliklerinden,

$$y \to 0 \quad iken \quad P_y * f \to f$$

ve

$$y \to 0 \quad iken \quad Q_y * f \to Hf$$

olur.

Hf ifadesine de f fonksiyonunun Hilbert dönüşümü denir ve

$$Hf(x) := p.v.\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{f(t)}{x-t}dt \tag{4.16}$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 4.3.1 Eğer $f \in L^2(\mathbb{R})$ ise,

$$\widehat{Hf}(\xi) = -i \; sgn \; \xi \; \widehat{f}(\xi) \tag{4.17}$$

dir. $K(x) = p.v.\frac{1}{x}$ olsun, bu durumda $Hf = (K * f)$ dir. (**Lu, Ding ve Yan 2006**)

İspat. $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ olsun ve $\triangle u = f$ Poisson denklemi verilsin, burada

$$\Delta = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$$

$\mathbb{R}^n$ de Laplace operatörüdür. Eşitliğin her iki tarafa Fourier dönüşümü uygulandığında

$$\widehat{f}(\xi) = -4(\pi)^2|\xi|^2\widehat{u}(\xi)$$

olduğunu elde ederiz. Bu da

$$\widehat{u}(\xi) = -\frac{1}{4\pi^2|\xi|^2}\widehat{f}(\xi)$$

eşitliğidir. Böylece, $1 \leq j, k \leq n$ için

$$\begin{aligned} \frac{\widehat{\partial^2 u}}{\partial x_j \partial x_k}(\xi) &= -4(\pi)^2 \xi_i \xi_k \widehat{u}(\xi) \\ &= \frac{\xi_j \xi_k}{|\xi|^2}\widehat{f}(\xi) \end{aligned}$$

dir. Eğer operatörü

$$\widehat{R_j f}(\xi) = -i\frac{\xi_j}{|\xi|}\widehat{f(\xi)}, j = 1, 2, ..., n \tag{4.18}$$

şeklinde tanımlarsak,

$$\widehat{\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k}}(\xi) = -\widehat{R_j R_k} f(\xi)$$

eşitliği sağlanır. (4.18) denklemiyle tanımlanan R_j operatörü Riesz dönüşümü olarak adlandırılır. Böylece Poisson denkleminin çözümünün düzgünlüğü Riesz dönüşümünün sınırlılığına karşılık gelir. (4.17) ile (4.18) karşılaştırıldığında Riesz dönüşümünün Hilbert dönüşümünün bir boyuttan n boyuta bir genelleştirmesi olduğu görülmektedir. $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1 \leq p < \infty)$ ise f nin Riesz dönüşümü aşağıdaki forma sahiptir.

$$R_j f(x) = p.v.c_n \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{x_i - y_i}{|x-y|^{n+1}} f(y)dy, 1 \leq j \leq n \tag{4.19}$$

Eğer $K_j(x) = p.v.\frac{x_j}{|x|^{n+1}}(j = 1, 2, ..., n)$ alırsak,

$$R_j f = K_j * f$$

olur. ■

Şimdi singüler integral operatörünü tanımlayalım. $n \geq 3$ olduğu zaman, Δ Laplace operatörünün temel çözümü

$$\Gamma(x) = \frac{1}{(2-n)w_{n-1}} \frac{1}{|x|^{n-2}}$$

dir. Örneğin $f \in f(\mathbb{R}^n)$ için f iyi özelliklere sahip olduğu zaman $\Gamma * f$, $\Delta u = f$ Possion denkleminin bir çözümüdür. Bu da

$$\begin{aligned} u(x) &= (\Gamma * f)(x) \\ &= C_n \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-2}} dy \end{aligned}$$

dir. u' nun ikinci kısmi türevi alındığında, $\Omega_j(y) = C_n(1 - n|y| - 2y_j^2)$ olduğunda

$$\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_j} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\Omega_j(x-y)}{|x-y|^n} f(y)dy = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int\limits_{|x-y|>\varepsilon} \frac{\Omega_i(x-y)}{|x-y|^n} f(y)dy$$

elde edilir. Ω için aşağıdaki özellikler sağlanır.

(a) $\Omega_j(\lambda_y) = \Omega_j(y), \forall \lambda > 0$

(b) $\int\limits_{S^{n-1}} \Omega_j(y')d_\sigma(y') = 0$

(c) $\Omega_j \epsilon L^1(S^{n-1})$.

$$T_j f(x) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int\limits_{|x-y|>\varepsilon} \frac{\Omega_j(x-y)}{|x-y|^n} f(y)dy \tag{4.20}$$

diyelim. Böylece $\Delta u = f$ denkleminin çözümünün L^p düzgünlüğü T_j operatörünün L^p sınırlılığına karşılık gelmektedir. Kabul edelim ki (a), (b) ve (c) şartlarını sağlayan bir Ω fonksiyonu verilsin. Böylece

$$f \in L^p(\mathbb{R}^n), \quad (1 \leq p < \infty)$$

için

$$T_\Omega f(x) = p.v. \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^n} f(y)dy$$

tanımlanır.

Eğer $\Omega(x) = \frac{x_j}{|x|}$ ise, T_Ω, $R_j (j = 1, 2, ..., n)$ Riesz dönüşümü olur.

Eğer $n = 1$ ve $\Omega(x) = sgn(x)$ ise T_Ω, H Hilbert dönüşümüdür.

Tanım 4.3.2 $K(x) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n - \{0\})$ olmak üzere,

$$|K(x)| \leq B|x|^{-n}, \forall x \neq 0 \tag{4.21}$$

$$\int\limits_{r \leq |x| \leq R} K(x)dx = 0, \forall 0 < r < R < \infty \tag{4.22}$$

$$\int\limits_{|x| \geq 2|y|} |K(x-y) - K(x)|dx \leq B, \quad \forall y \neq 0 \tag{4.23}$$

şartları sağlansın, burada B sabiti x ve y den bağımsızdır. Bu durumda K ya Calderon-Zygmund çekirdeği denir ve (4.23) şartı Hörmander şartı olarak adlandırılır. (**Sadosky, 1979**)

Teorem 4.3.3 K Calderon-Zygmund çekirdeği, $\epsilon > 0$ ve $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1 < p < \infty)$ için

$$T_\epsilon f(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,\varepsilon)} f(x-y)K(y)dy$$

olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler doğrudur.

(i) $\|T_\epsilon f\|_{L^p} \leq A_p \|f\|_{L^p}$, burada A_p, ϵ ve f den bağımsızdır.

(ii) Her $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ için L^p normuna göre $\lim\limits_{\epsilon\to 0} T_\epsilon f$ vardır. Bu da, bir T nin varlığını gerektirir öyleki

$$Tf(x) = p.v. \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x-y)K(y)dy$$

dir.

(iii) $\|Tf\|_{L^p} \leq A_p \|f\|_{L^p}$ dir.

(**Calderon ve Zygmund, 1979**)

İspat. $\epsilon > 0$ için, $K_\epsilon(x) = K(x)\chi_{\{|x|\geq\epsilon\}(x)}$ olsun. Böylece $T_\epsilon f(x) = K_\epsilon * f(x)$ dir. İlk olarak T_ϵ un (2,2) tipinden olduğu gösterilsin. T_ϵ $L^2(\mathbb{R}^n)$ üzerinde düzgün sınırlıdır. Daha sonra K_ϵ nun (4.23) durumunda düzgün olduğu gösterilecektir. Her bir $x, y \in \mathbb{R}^n$, $y \neq 0$ $|x| \geq 2|y|$ için eğer x ve $x-y$ nin her ikiside $B(0,\epsilon)$ içinde iseler $K_\epsilon(x) = K\epsilon(x-y) = 0$ dır. Eğer x ve $x-y$ nin her ikiside $B(0,\epsilon)$ ise $K_\epsilon(x) = K(x)$, $K_\epsilon(x-y) = K(x-y)$ olur. Bu durumda K_ϵ (4.23) şartını sağlar. Eğer $|x| > \epsilon$ ve $|x-y| < \epsilon$ ise $\frac{|x|}{2} \leq |x-y| < \epsilon$ ve $\epsilon < |x| < 2\epsilon$ olur. Bundan dolayı, C ϵ dan bağımsız olmak üzere

$$\int\limits_{|x|\geq 2|y|} |K_\epsilon(x-y) - K_\epsilon(x)|dx \leq \int\limits_{\epsilon\leq|x|\leq 2\epsilon} |K_\epsilon(x)|dx \leq CB$$

olur. Buradan her $\epsilon > 0$, $K_\epsilon \in L^2(\mathbb{R}^n)$ için $C > 0$ olacak şekilde bir sabitin varlığını göstermek yeterlidir öyle ki her $\epsilon > 0$ için

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} |\hat{K}_\epsilon(\xi)| \leq CB \tag{4.24}$$

dir. $\xi \in \mathbb{R}^n$ için,

$$\begin{aligned}
\hat{K}_\epsilon(\xi) &= \lim_{R\to\infty} \int\limits_{|x|\leq R} e^{-2\pi x\xi} K_\epsilon(x)dx \\
&= \lim_{R\to\infty} \left(\int\limits_{|x|\leq\frac{\alpha}{|\xi|}} e^{-2\pi x\xi} K_\epsilon(x)dx + \int\limits_{\frac{\alpha}{\xi}<|x|\leq R} e^{-2\pi i x\xi} K_\epsilon(x)dx \right) \\
&:= \lim_{R\to\infty} (I_1 + I_2)
\end{aligned}$$

dir. (4.21) ve (4.22) şartlarından

$$
\begin{aligned}
|I_1| &= \left| \int\limits_{|x|\leq} \frac{\alpha}{\xi}|(e^{-2\pi ix\xi} - 1)K_\epsilon(x)dx \right| \\
&\leq C|\xi| \int\limits_{|x|\leq \frac{\alpha}{|\xi|}} |x||K_\epsilon(x)|dx \\
&\leq C\alpha B
\end{aligned}
$$

elde edilir. Şimdi I_2 ye bakalım. $y = \frac{\xi}{2|\xi|^2}$ alırsak $e^{2\pi iy\xi} = -1$ olur. Burada

$$
J = \left(\int\limits_{\frac{\alpha}{\xi}<|x|\leq R} - \int\limits_{\frac{\alpha}{\xi}<|x-y|\leq R} \right) e^{-2\pi ix\xi} K_\epsilon(x-y)dx
$$

alırsak,

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \int\limits_{\frac{\alpha}{\xi}<|x-y|\leq R} e^{-2\pi i(x-y)\xi} K_\epsilon(x-y)dx \\
&= -\int\limits_{\frac{\alpha}{\xi}<|x-y|\leq R} e^{-2\pi ix\xi} K_\epsilon(x-y)dx \\
&= -\int\limits_{\frac{\alpha}{\xi}<|x|\leq R} e^{-2\pi ix\xi} K_\epsilon(x-y)dx + J,
\end{aligned}
$$

olur. Buradan

$$
I_2 = \frac{1}{2} \int\limits_{\frac{\alpha}{\xi}<|x|\leq R} [K_\epsilon(x) - K_\epsilon(x-y)]e^{-2\pi ix\xi}dx + \frac{J}{2}
$$

bulunur. $|y| = \frac{1}{2|\xi|}$ ve $\alpha > 1$ iken, C ve B, ϵ ve ξ den bağımsız olmak üzeere

$$
\left| \int\limits_{\frac{\alpha}{\xi}<|x|\leq R} [K_\epsilon(x) - K_\epsilon(x-y)]e^{-2\pi ix\xi}dx \right| \leq \int\limits_{|x|\geq 2|y|} |K_\epsilon(x) - K_\epsilon(x-y)|dx \leq CB
$$

ifadesi elde edilir. Diğer taraftan eğer $x|\frac{\alpha}{\xi} < |x| \leq R$ ve $x|\frac{\alpha}{\xi} < |x-y| \leq R$ alır ve her ikisinin simetrik farkına E dersek,

$$
|J| \leq \int\limits_E |K_\epsilon(x-y)|dx
$$

olur. Buradan $|y| = \frac{1}{2|\xi|}$ ve $\alpha > 1$ alınırsa

$$E \subset x|\frac{\alpha}{2\xi} \leq |x| \leq \frac{2\alpha}{\xi} \bigcup x|\frac{R}{2} \leq |x| \leq 2R$$

elde edilir. Böylece (4.21) den C ve B, ϵ ve ξ den bağımsız olmak üzere

$$|J| \leq \int\limits_{\frac{\alpha}{2\xi} \leq |x| \leq \frac{2\alpha}{\xi}} |K_\epsilon(x-y)|dx + \int\limits_{\frac{R}{2} \leq |x| \leq 2R} |K_\epsilon(x-y)|dx \leq CB$$

olur. Yukarıdakileri toparlayıp (4.24) yi ele aldığımızda T_ϵ, $L^2(\mathbb{R}^n)$ üzerinde ϵ'a göre düzgün sınırlıdır.

Şimdi T_ϵ'un (1,1) zayıf tipinden olduğunu ve bu sınırlılığın ϵ'dan bağımsız olduğunu gösterilsin.

Her $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ve $\lambda > 0$ için bu fonksiyonun Calderon-Zygmund ayrışımı g, b ve Q_j örtüşmeyen küpler şeklinde alınırsa $f = \mathrm{g} + b$ için aşağıdaki özellikler sağlanır:

(a) $\|\mathrm{g}\|_{L^2}^2 \leq C\lambda\|f\|_{L^1}, \quad |\mathrm{g}(x)| \leq 2^n\lambda,\ h.h \ \ x \in \mathbb{R}^n;$

(b) $\lambda \leq \frac{1}{Q_j} \int\limits_{Q_j} f(x)dx \leq 2^n\lambda$, her Q_j için;

(c) $\sum\limits_j |Q_j| \leq \frac{1}{j}\|f\|_{L^1};$

(d) $b(x) = \sum\limits_j b_j(x) \quad \int\limits_{Q_j} b_j dx = 0, \quad \text{supp} \ \ b_j \subset Q_j$ ve $\|b_j\|_{L^1} \leq 2\int\limits_{Q_j} |f(x)|dx$

dir. Çünkü

$$T_\epsilon f(x) = T_\epsilon \mathrm{g}(x) + T_\epsilon b(x)$$

den

$$\Big\{x \in \mathbb{R}^n : |T_\epsilon f(x)| > \lambda|\Big\} \leq \left|\Big\{x \in \mathbb{R}^n |T_\epsilon \mathrm{g}(x)| > \frac{\lambda}{2}\Big\}\right| + \left|\Big\{x \in \mathbb{R}^n |T_\epsilon b(x)| > \frac{\lambda}{2}\Big\}\right|$$
$$:= I_1 + I_2$$

olur. Birinci adım ve (a)'dan

$$I_1 \leq \left(\frac{2}{\lambda}\right)^2 \int\limits_{\mathbb{R}^n} |T_\epsilon \mathrm{g}(x)|^2 dx \leq \frac{4C}{\lambda^2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\mathrm{g}(x)|^2 dx \leq \frac{4C}{\lambda} \|f\|_{L^1}.$$

$$|E^*| \leq \sum_j |Q_j^*| \leq \frac{C_n}{\lambda} \|f\|_{L^1}$$

elde ederiz. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} I_2 &\leq |E^*| + \left| \left\{ x \in E^* |T_\epsilon b(x)| > \frac{\lambda}{2} \right\} \right| \\ &\leq \frac{C_n}{\lambda} \|f\|_{L^1} + \frac{2}{\lambda} \int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus E^*} |T_\epsilon b(x)| dx \end{aligned}$$

olur.

$$\sum_j \int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus E^*} |T_\epsilon b_j(x)| dx \leq C \|f\|_{L^1} \tag{4.25}$$

ifadesini ispatlamak için $|T_\epsilon b(x)| \leq \sum_j |T_\epsilon b_j(x)|$ olduğunu göstermek yeterlidir. y_j Q_j'nin merkezini ifade ettiğinden (4.23) den (b) ve (c) ikisi birlikte (4.25) i sağladığından

$$\begin{aligned} \int\limits_{\mathbb{R}^n E^*} |T_\epsilon b_j(x)| dx &\leq \int\limits_{\mathbb{R}^n Q_j^*} \int\limits_{Q_j} |K_\epsilon(x-y) - K_\epsilon(x-y_j)||b_j(y)| dy dx \\ &\leq \int\limits_{Q_j} |b_j(y)| \int\limits_{\mathbb{R}^n Q_j^*} |K_\epsilon(x-y) - K_\epsilon(x-y_j)| dx dy \\ &\leq CB \int\limits_{Q_j} |b_j(y)| dy \leq 2CB \int\limits_{Q_j} |f(y)| dy \end{aligned}$$

ifadesine sahibiz. Buradan da T_ϵ, $(1,1)$ zayıf tipindendir ve onun sınırlılığı ϵ ya da f den bağımsızdır.

Şimdi T_ϵ'nin (p,p), $1 < p < \infty$, kuvvetli tipinden olduğunu göstereceğiz. Marcinkiewicz interpolasyon teoreminin uygulanmasından T_ϵ'un (p,p) $(1 < p < 2)$ tipli olduğu biliniyor ve onun sınırlılığı ϵ ya da f den bağımsızdır.

Şimdi $2 < p < \infty$ olduğunu kabul edelim ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ den $1 < q < 2$ olur. Eğer $\widetilde{T_\epsilon}$'yı T_ϵ nun dual operatörü olarak alırsak $\widetilde{K_\epsilon(x)} = \overline{K_\epsilon(-x)}$ iken $\widetilde{T_\epsilon f(x)} =$

$\widetilde{K_\epsilon} * f(x)$ elde edilir. Açık olarak $\widetilde{K_\epsilon}, K_\epsilon$ nun tüm şartlarını sağlar. Böylece $\widetilde{T_\epsilon}$ (q,q) tipindendir. Bu nedenle her $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ için

$$\begin{aligned}
\|T_\epsilon f\|_{L^p} &= \sup_{\|g\|_q \le 1} \left| \int_{\mathbb{R}^n} T_\epsilon f(x) g(x) dx \right| \\
&= \sup_{\|g\|_{L^q} \le 1} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \widetilde{T}_\epsilon g(x) dx \right| \\
&\le \|f\|_{L^p} \sup_{\|g\|_{L^q} \le 1} \|\widetilde{T}_\epsilon g\|_{L^q} \\
&\le A_p \|f\|_{L^p}
\end{aligned}$$

dir.

Daha sonra her $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1 < p < \infty)$ için T_f nin varlığını ve L^p de $T_\epsilon f$' nin sınırlılığını gösterelim. İlk olarak $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ olduğunu kabul edelim. Her y $(y \neq 0)$ için

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \le C|y| \tag{4.26}$$

elde etmek gerekir. Aslında

$$\frac{d}{dt} f(x - ty) = \langle \nabla f, -y \rangle (x - ty)$$

dir ve buradan $y' = \frac{y}{|y|}$ olduğunda

$$\begin{aligned}
f(x-y) - f(x) &= \int \frac{d}{dt} f(x - ty) dt \\
&= f' \langle \nabla f, -y \rangle (x - ty) dt \\
&= \int_0^{|y|} \langle \nabla f, -y' \rangle (x - sy) ds
\end{aligned}$$

olur. Bu nedenle

$$\begin{aligned}
\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\langle \nabla f, -y' \rangle (x - sy) ds|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\le \int_0^{|y|} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\langle \nabla f, -y' \rangle (x - sy)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} ds \\
&\le |y| \sum_{j=1}^n \left\| \frac{\partial f}{\partial x_j} \right\|_{L^p}
\end{aligned}$$

dir. Şimdi $0 < \eta < \epsilon$ alalım. Böylece (4.26) ve (4.21) den

$$\begin{aligned}
\|T_\eta f - T_\epsilon f\|_{L^p} &\leq \int\limits_{\eta<|y|<\epsilon} |K_y| \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} dy \\
&\leq C \int\limits_{\eta<|y|\leq\epsilon} |y||K(y)|dy \\
&\leq CB \to 0 (\eta, \epsilon \to 0)
\end{aligned}$$

Bu da her f fonksiyonunun $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ olduğunu gösterir. $T_\epsilon f$, $L^p(\mathbb{R}^n)$ de bir Cauchy dizisidir. Bu nedenle

$$\lim_{\epsilon\to 0} \|T_\epsilon f - Tf\| = 0$$

olacak şekilde $Tf \in L^p$ vardır.

$$\|Tf\|_{L^p} \leq A_p \| \|f\|_{L^p}$$

den

$$\begin{aligned}
\|Tf\|_{L^p} &\leq \|Tf - T_\epsilon f\|_{L^p} + \|T_\epsilon f\|_{L^p} \\
&\leq \|Tf - T_\epsilon f\|_{L^p} + A_p \|f\|_{L^p}
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Her $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ve $\delta > 0$ için $\mathrm{g} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ vardır öyleki $f = \mathrm{g} + h$ ve $\|h\|_p < \infty$ dır. Böylece $0 < \eta < \epsilon$ için

$$\begin{aligned}
\|T_\eta f - T_\epsilon f\|_{L^p} &\leq \|T_\eta(f - \mathrm{g})\|_{L^p} + \|T_\eta \mathrm{g} - T_\epsilon g\|_{L^p} + \|T_\epsilon(\mathrm{g} - f)\|_{L^p} \\
&\leq A_p \|(f - \mathrm{g})\|_{L^p} + \|T_\eta g - T_\epsilon \mathrm{g}\|_{L^p} + A_p \|(\mathrm{g} - f)\|_{L^p} \\
&\to 2A_{L^p}\ \delta, \quad iken \ \ \eta, \epsilon \to 0
\end{aligned}$$

dır. δ keyfi olduğu için $T_\epsilon f$ her $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ için $L^p(\mathbb{R}^n)$ de daima bir Cauchy Dizisi olduğunu gösterir. Bu nedenle $Tf \in L^p$ vardır öyleki

$$\lim_{\epsilon\to 0} \|Tf - T_\epsilon f\|_{L^p} = 0$$

ve

$$\|Tf\|_{L^p} \leq A_p \|f\|_{L^p}$$

dir. Bu da ispatı tamamlar. ■

Teorem 4.3.4 Kabul edelim ki $\Omega(x)$ sınırlı bir fonksiyon öyle ki

$$\int\limits_{S^{n-1}} \Omega(x')d\sigma(x') = 0 \tag{4.27}$$

sağlanır ve

$$\int\limits_{0}^{1} \frac{w_\infty(\delta)}{\delta} d\delta < \infty \tag{4.28}$$

dir. $f \in L^p(\mathbb{R}^n), 1 < p < \infty$ için

$$T_\epsilon f(x) = \int\limits_{|y|\geq\epsilon} \frac{\Omega(y)}{|y|^n} f(x-y)dy$$

olsun. Bu durumda aşağıdaki üç durum sağlanır:

(i) f den bağımsız bir A_p sabiti vardır öyle ki $\|T_\epsilon f\|_{L^p} \leq A_p \|f\|_{L^p}$

(ii) Tf vardır öyleki L^p normunda

$$\lim_{\epsilon\to 0} T_\epsilon f = Tf(x)$$

dir.

(iii) $\|Tf\|_{L^p} \leq A_p \|f\|_{L^p}$

dır. (**Lu, Ding ve Yan, 2006**)

İspat. Teorem 4.3.3 den, $k(x) = \frac{\Omega(x)}{|x|^n}$, (4.23) şartını göstermek yeterlidir. $|x| \geq 2|y|$ ile $0 < Q < 1$ için

$$|x - Qy| \leq |x| + |y| \leq \frac{3}{2}|x|$$

ve

$$|x - y| \geq |x| - |y| \geq \frac{1}{2}|x|$$

olduğu zaman

$$K(x-y) - K(x) = \frac{\Omega(x-y) - \Omega(x)}{|x-y|^n} + \Omega(x)\left(\frac{1}{|x-y|^n} - \frac{1}{|x|^n}\right) := I_1 + I_2.$$

dir. Böylece

$$\left|\frac{1}{|x-y|^n}-\frac{1}{|x|^n}\right| \leq C\frac{|y||x-Qy|^{n-1}}{|x-y|^n|x|^n} \leq C\frac{|y|}{|x|^{n+1}}. \tag{4.29}$$

dır. Diğer yandan $|x| \geq 2|y|$ olduğu zaman

$$\left|\frac{x-y}{|x-y|}-\frac{x}{|x|}\right| \leq 2\frac{|y|}{|x|} \tag{4.30}$$

dır. Bu yüzden (4.29) ve (4.30) den

$$\begin{aligned}
\int\limits_{|x\geq 2|y||} |K(x-y)-K(x)|dx \leq & \int\limits_{|x\geq 2|y||} |I_1|dx + \int\limits_{|x\geq 2|y||} |I_2|dx \\
\leq & \int\limits_{|x\geq 2|y||} \left|\Omega\left(\frac{x-y}{|x-y|}\right)-\Omega\left(\frac{x}{|x|}\right)\right| \frac{dx}{|x-y|^n} \\
& + C \parallel Q \parallel_\infty |y| \int\limits_{|x\geq 2|y||} \frac{dx}{|x|^{n+1}} \\
\leq & C \int\limits_{|x\geq 2|y||} w_\infty\left(2\frac{|y|}{|x|}\right)\frac{dx}{|x|^n} + C' \parallel Q \parallel_{L^\infty} \\
= & C \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \int\limits_{2|y|} w_\infty\left(2\frac{|y|}{|r|}\right) d\sigma(x')\frac{dr}{r} + C' \parallel Q \parallel_{L^\infty} \\
\leq & C' \int\limits_0^1 \frac{w_\infty(\delta)}{\delta} d\delta + C \parallel Q \parallel_{L^\infty} \\
\leq & B
\end{aligned}$$

elde edilir. ∎

Uyarı 4.3.5 Ω sıfır dereceli homojen ve $K(x) = \frac{\Omega(x)}{|x|^n}$ ise, bu durumda

$$T_\Omega f(x) := p.v. \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\Omega(y)}{|y|^n} f(x-y)dy \tag{4.31}$$

şeklinde tanımından T_Ω, homojen çekirdekli bir singüler integral operatörü olarak adlandırılır. Theorem 4.3.3 ve Theorem 4.3.4 gösterir ki homojen çekirdekli singüler integral operatörü ve Calderon-Zygmund singüler integral operatörünün L^p normunda (kesik operatörlerin ailesi olarak) limiti vardır ve her iki operatör de (p,p) $(1 < p < \infty)$ tipindendir. $T_\epsilon f(x)$ in noktasal anlamda da limiti vardır.

Kabul edelim ki T_Ω (4.31) ile tanımlanan bir singüler integral operatörüdür. Ω, $\mathbb{R}^n$ de sıfırıncı dereceden homojen olsun ve (4.27) ve (4.28) ifadelerini sağlasın. Her $f \in L^p(\mathbb{R}^n)(1 \leq p < \infty)$ için

$$T^*_\Omega f(x) = \sup_{\epsilon > 0} |T_{\Omega,\epsilon} f(x)|$$

ifadesi $T_{\Omega,\epsilon}$ nun

$$T_{\Omega,\epsilon} f(x) = \int\limits_{|y| \geq \epsilon} \frac{\Omega_y}{|y|^n} f(x-y)dy, \quad \epsilon > 0$$

ile tanımlanan T_Ω operatörünün maksimal singüler integral operatörü olarak adlandırılır. (**Lu, Ding ve Yan, 2006**)

Lemma 4.3.6 (Cotlar eşitsizliği) $C_1, C_2 > 0$ olacak şekilde iki sabit vardır öyleki M nin Hardy-Littlewood maksimal operatörü olmak üzere $\forall f \in L^p(\mathbb{R}^n)(1 < p < \infty)$ ve $x \in \mathbb{R}^n$ için

$$T^*_\Omega f(x) \leq C_1 M(T_\Omega f)(x) + C_2 M f(x) \tag{4.32}$$

dir. (**Lu, Ding ve Yan, 2006**)

İspat. $K_\varepsilon(x) = |x|^{-n} Q(x) \chi_{\{|x| \geq \varepsilon\}}$ olsun. Kompakt destekli negatif olmayan $\varphi \in \mathfrak{F}(\mathbb{R}^n)$ radyal fonksiyonu seçelim öyle ki $supp(\varphi) \subset \{x : |x| \leq 1\}$ ve

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)dx = 1$$

olsun. Genelliği kaybetmeden $\varphi(|x|)$ i $|x|$ de azalan olarak alınabilir. Böylece

$$\lim_{\varepsilon \to 0} K_\varepsilon * \varphi = K * \varphi$$

noktasal olarak sağlanır.

Şimdi $\phi(x) = K * \varphi(x) - K_1(x)$ olduğunu göstereceğiz. K $-n$. dereceden homojen olduğu için

$$\phi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} \phi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

ve

$$\varphi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

olduğunda $\varepsilon > 0$ için

$$\phi_\varepsilon(x) = \varphi_\varepsilon * K(x) - K_\varepsilon(x) \tag{4.33}$$

sağlanır. (4.33) den $\forall f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ için

$$T_{\Omega,\varepsilon} f(x) = K_\varepsilon * f(x) = (\varphi_\varepsilon * K) * f(x) - \phi_\varepsilon * f(x) \tag{4.34}$$

dır. Diğer yandan $\forall \eta > 0$ ve $x \in \mathbb{R}^n$ için,

$$(\varphi_{\varepsilon *} K_\eta) * f(x) = \varphi_\varepsilon * (K_\eta * f)(x) = \varphi_\varepsilon * (T_{\Omega,\eta} f)(x).$$

olur. $\varphi_{\varepsilon \in L^q}$ olsun. Böylece $\varphi_{\varepsilon *} K_\eta$, $\eta \to 0$ iken L^p de $\varphi_{\varepsilon *} K_\eta$ ya yakınsar. (Teorem 4.3.3 in ispatından görülebilir.) Bu arada $T_{\Omega,\eta} f$, L^∞ da $T_\Omega f$ ye yakınsamaktadır. Böylece

$$(\varphi_\varepsilon * K) * f(x) = \varphi_\varepsilon * (T_\Omega f)(x)$$

dır. Bu formül (4.34) ile birlikte

$$T_{\Omega,\varepsilon} f(x) = \varphi_\varepsilon * (T_\Omega f)(x) - \phi_\varepsilon * f(x) \tag{4.35}$$

yı ifade eder. İleride ϕ nin bir radyal integrallenebilir fonksiyon tarafından dominant olabileceği gösterilecek. $|x| < 1$ olduğu zaman

$$\phi(x) = \varphi * K(x) = \int_{\mathbb{R}^n} [\varphi(x-y) - \varphi(x)] K(y) dy$$

dır. Unutmayalım ki; $K(y) = |y|^{-n}\Omega(y), \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ve $supp\varphi \subset \{x : |x| \leq 1\}$ dir. Açıkça $\phi, |x| < 1$ olduğu zaman sınırlıdır. $|x| > 2$ olduğunda

$$\begin{aligned}
\phi(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} K(x-y)\varphi(y)dy - K(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} [K(x-y) - K(x)]\varphi(y)dy
\end{aligned}$$

dır.

$$|K(x-y)-K(x)| \leq \frac{|\Omega(x-y)-\Omega(x)|}{|x-y|^n} + |\Omega(x)| \left| \frac{1}{|x-y|^n} - \frac{1}{|x|^n} \right|$$

olduğu için, Theorem 4.3.4 ün ispatı

$$|K(x-y)-K(x)| \leq C^1 |x|^{-n} w_\infty \left(\frac{2}{|x|} \right)$$

ifade eder. Böylece $|x| > 2$ olduğunda $|\phi(x)| \leq C^1 |x|^{-n} w_\infty \left(\frac{2}{|x|} \right)$ dir. Ω (4.29) durumunu sağladığı için, ϕ nin minimum radikal baskın fonksiyonu

$$\psi(x) = \sup_{|y| \geq |x|} |\phi(y)|$$

nin integrallenebilir olmasıyla ifade edilir. Böylece (4.35) ve Hardy-Littlewood maksimal operatörün özelliklerinden $C_1, C_2 > 0$ varlığı elde edilir öyleki,

$$\begin{aligned} T_\Omega * f(x) &= \sup_{\varepsilon > 0} |T_{\Omega,\varepsilon} f(x)| \\ &\leq \sup_{\varepsilon > 0} |\varphi_\varepsilon * (T_\Omega f)(x)| + \sup_{\varepsilon > 0} |\phi_\varepsilon * f(x)| \\ &\leq C_1 M(T_\Omega f)(x) + C_2 M f(x) \end{aligned}$$

dır. Bu da (4.32) ü gerektirir. M ve T_Ω nın her ikiside (p,p) tipinde operatörler olduğu için, (Teorem (1.1.1) ve Teorem 4.3.3 den görülür) $T_\Omega^*, (p,p)$ tipindendir. ■

Teorem 4.3.7 Kabul edelim ki Ω, 0 dereceli ve (4.27) ve (4.28) şartlarını sağlayan bir homojen sınırlı fonksiyon olsun. Bu durumda T_Ω^*, (p,p) $(1 < p < \infty)$ ve zayıf (1,1) tipindendir. (**Lu, Ding ve Yan, 2006**)

İspat. T_Ω^* nın (1.1) zayıf tipli operatör olduğunu göstermek yeterlidir. İspattaki fikir Teorem 4.3.4 deki ile aynıdır. $\forall f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ve $\lambda > 0$ için Calderon-Zygmund ayrışımı kullanırsak $f = \mathrm{g} + b$ ve $\{\theta_j\}$ örtüşmeyen küplerin bir dizisi olur. Böylece

$$\left| \left\{ x : T_\Omega^* f(x) > \lambda \right\} \right| \leq \left| \left\{ x : T_\Omega^* \mathrm{g}(x) > \frac{\lambda}{2} \right\} \right| + \left| \left\{ x : T_\Omega^* b(x) > \frac{\lambda}{2} \right\} \right|. \tag{4.36}$$

$||\mathrm{g}||_{L^2}^2 \leq C\lambda ||f||_{L^1}$ ve T_Ω^* (2.2) nin bir tipi olduğu için

$$\left| \left\{ x : T_\Omega^* \mathrm{g}(x) > \frac{\lambda}{2} \right\} \right| \leq C' \lambda^{-2} ||T_\Omega^* \mathrm{g}||_{L^2}^2 \leq C'' \frac{1}{\lambda} ||f||_{L^1}.$$

dır. Şimdi y_j ile Q_j nin merkezi belirtilip ve d_j ile de Q_j nin yan uzunluğunu gösterilecektir. Böylece

$$|E| \leq \sum_j |S_j| = \sum_j C_n |Q_j| \leq \frac{C_n}{\lambda} ||f||_{L^1}$$

bulunur. Bu da

$$\left| \left\{ x : T^*_\Omega b(x) > \frac{\lambda}{2} \right\} \right| \leq |E| + \left| \left\{ x \in E^c : T^*_\Omega b(x) > \frac{\lambda}{2}) \right\} \right| \tag{4.37}$$

yi sağlar. $x \in E^c$ ve $\varepsilon > 0$ olduğunda

$$T_{\Omega,\varepsilon} b(x) = \sum_j \int\limits_{Q_j} K_\varepsilon(x-y) b(y) d(y)$$

olur. Q_j nin aşağıdaki üç durumunu göz önüne alalım.

(i) $\forall y \in Q_j$ için, $|x-y| < \varepsilon$;

(ii) $\forall y \in Q_j$ için, $|x-y| > \varepsilon$;

(iii) $y \in Q_j$ nin varlığında, $|x-y| = \varepsilon$

dur.

İlk durum için, $K_\varepsilon(x-y) = 0$. Böylece $T_{\Omega,\varepsilon} b(x) = 0$ dır. İkinci durum için, $K_\varepsilon(x-y) = K(x-y)$, böylece

$$\begin{aligned} \left| \int\limits_{Q_j} K_\varepsilon(x-y) b_j(y) dy \right| &= \left| \int\limits_{Q_j} [K(x-y) - K(x-y_j)] b_j(y) dy \right| \\ &\leq \int\limits_{Q_j} |[K(x-y) - K(x-y_j)] b_j(y) dy| \end{aligned}$$

dır. Üçüncü durum olarak, $x \in E^c \subset S_j^c$ için, $S(x,r)$, yarıçapı $r = C_n \varepsilon$ ve merkezi x olan kapalı bir küre olduğu yerde, $Q_j \subset S(x,r)$ olsun diye sadece n ye bağlı iki sabit C_n ve $C_n^{'}$ vardır. Eğer $y \in Q_j$ ise $|x-y| \geq C_n^{'} \varepsilon$ dur. Böylece, $y \in Q_j$ için,

$$|K_\varepsilon(x-y)| \leq \frac{|\Omega(x-y)|}{|x-y|^n} \leq |\Omega|_\infty (C_n^{'} \varepsilon)^{-n}.$$

dir. Bu yüzden

$$\left|\int\limits_{Q_j} K_\varepsilon(x-y)b_j(y)dy\right| \leq \int\limits_{Q_j\cap S(x,y)} |K_\varepsilon(x-y)||b(y)|dy$$
$$\leq C^{'}||\Omega||_\infty \varepsilon^{-n}\int\limits_{S(\mathcal{X},r)} |b(y)|dy$$
$$\leq C^{''}\frac{1}{|S(x,r)|}\int\limits_{S(x,r)} |b(y)|dy$$

olur. Tüm küplerin toplamı alınarak

$$|T_{\Omega,\varepsilon}b(x)| \leq \sum_j \int\limits_{Q_j} |K(x-y)-K(x-y_j)||b_j(y)|dy + \frac{C^{''}}{|S(x,r)|}\int\limits_{S(x,r)} |b(y)|dy$$

elde edilir. Böylece,

$$|T^*_\Omega b(x)| \leq \sum_j \int\limits_{Q_j} |K(x-y)-K(x-y_j)||b(y)|dy + CMb(x).$$

olur. Bundan dolayı

$$\left|\left\{x\in E^c : T_{\Omega,\varepsilon}b(x) > \frac{\lambda}{2}\right\}\right| \leq \left|\left\{x\in E^c : \sum_j \int\limits_{Q_j} |K(x-y)-K(x-y_j)||b(y)|dy > \frac{\lambda}{4}\right\}\right|$$
$$+\left|\left\{x\in E^c : CMb(x)\frac{\lambda}{4}\right\}\right|$$

dır. (4.25) ve Hardy-Littlewood maksimal operatörün $(1,1)$ zayıf sınırlılığından

$$\left|\left\{x\in E^c : T_{\Omega,\varepsilon}b(x) > \frac{\lambda}{2}\right\}\right| \leq \frac{C^{'}}{\lambda}||f||_{L^1}$$

ifadesi elde edilir. Bu eşitsizlik (4.36) ve (4.37) ile birlikte gösterirki T^*_Ω $(1,1)$ zayıf tipli operatördür. ■

Sonuç 4.3.8 Eğer Ω Teorem 4.3.7 deki şartları sağlarsa $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1<p<\infty)$ için

$$\lim_{\epsilon\to 0} T_{\Omega,\epsilon}f(x) = T_\Omega f(x)$$

dir. (**Kufner, 2013**)

İspat. $f \in L^p(1 \leq p < \infty)$ için,

$$\Lambda f(x) = |\limsup_{\varepsilon \to 0} T_{\Omega,\varepsilon} f(x) - \liminf_{\varepsilon \to 0} T_{\Omega,\varepsilon} f(x)|, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

olsun, böylece, $\Lambda f(x) \leq 2T_\Omega^* f(x)$ olur. Keyfi $\delta > 0$ için, $f = g + h$, $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ve $||h||_p < \delta$ olsun. Ω (4.37) şartını sağlar ve g kompakt destekli bir düzgün fonksiyondur. $\varepsilon \to$ iken $T_{\Omega,\varepsilon} g$, $T_\Omega g$ ye yakınsar. Bu yüzden $\Lambda g(x) = 0$ dır. Böylece, $1 < p < \infty$ için

$$||\Lambda(f)||_{L^p} \leq ||\Lambda(h)||_{L^p} \leq 2A_p ||h||_{L^p} \leq 2A_p \delta$$

dır. δ keyfi olduğundan, $\Lambda(f)(x) = 0$ dır. Örneğin $1 < p < \infty$ için $x \in \mathbb{R}^n$ dir. Böylece, $x \in \mathbb{R}^n$ için $T_{\Omega,\varepsilon} f(x)$ nin limiti vardır.

Ayrıca $p = 1$ olduğunda, keyfi $\lambda > 0$ için

$$|\{x : \Lambda(f)(x) > \lambda\}| \leq \frac{2A}{\lambda} ||h||_{L^1} \leq \frac{2A\delta}{\lambda}$$

olur. Bu yüzden $x \in \mathbb{R}^n$ için $\Lambda(f)(x) = 0$ dır. Böylece $x \in \mathbb{R}^n$ ve $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ için $T_{\Omega,\varepsilon} f(x)$ in limiti vardır.

■

Sonuç 4.3.9 Eğer Ω Teorem 4.3.7 deki şartları sağlarsa T_Ω $(1,1)$ zayıf tipindendir. (**Lu, Ding ve Yan 2006**)

Uyarı 4.3.10 R_j $(j = 1, 2, ..., n)$ Riesz dönüşümleri $C_n = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\pi^{\frac{n+1}{2}}}$ olduğunda

$$R_j f(x) = p.v.\ C_n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{x_j - y_j}{|x - y|^{n+1}} f(y) dy$$

elde edilir. (**Lu, Ding ve Yan, 2006**)

Teorem 4.3.11 $R_j(j = 1, 2, ..., n)$ Riesz dönüşümleri (p, p) $(1 < p < \infty)$ tipinden ve (1,1) zayıf tipindendir. H Hilbert dönüşümü bir Riesz dönüşümü olduğundan

$$Hf(x) := p.v. \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(y)}{x - y} dy$$

şeklindedir. (**Lu, Ding ve Yan, 2006**)

Teorem 4.3.12 H Hilbert operatörü $(1,1)$ zayıf tipli ve (p,p) $(1 < p < \infty)$ tipli bir operatördür. (**Sadosky, 1979**)

Uyarı 4.3.13 H^* maksimal Hilbert dönüşümünü aşağıdaki şekilde tanımlayabiliriz.

$$H^*f(x) = \sup_{\epsilon>0} \left| C_n \int\limits_{|y|\geq\epsilon} \frac{f(x-y)}{y} dy \right|$$

$$R_j f(x) = \sup_{\epsilon>0} \left| C_n \int\limits_{|y|\geq\epsilon} \frac{y_j}{|y|^{n+1}} f(x-y) dy \right|, (j = 1, 2, ..., n)$$

olduğunda R_j^* maksimal Riesz dönüşümüdür.

Şimdi Calderon-Zygmund singüler integral operatörünün ağırlıklı sınırlılığı ve onun maksimal operatörü hakkında bilgi verelim. İlk olarak kesin (sharp) maksimal fonksiyonun tanımını verelim. $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere, f in $M^\sharp f(x)$ kesin maksimal fonksiyonu,

$$M^\sharp f(x) = \sup_{x\in Q} \frac{1}{|Q|} \int\limits_Q |f(y) - f_Q| dy, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

ile tanımlanır, burada supremum $\mathbb{R}^n$ de x merkezli r kenarlı $Q(x,r)$ küpleri üzerinden alınır ve

$$f_Q = \frac{1}{|Q|} \int\limits_Q f(t) dt$$

f nin Q üzerindeki ortalamasıdır. Her $a \in \mathbb{C}$ ve $Q \subset \mathbb{R}^n$ için

$$\frac{1}{|Q|} \int\limits_Q |f(x) - f_Q| dx \leq \frac{1}{|Q|} \int\limits_Q |f(x) - \alpha| dx + |\alpha - f_Q| \leq \frac{2}{|Q|} \int\limits_Q |f(x) - \alpha|$$

dır. (**Sadosky, 1979**)

Lemma 4.3.14 Kabul edelim ki Ω, $\mathbb{R}^n$ de 0. dereceden homojen, sınırlı bir fonksiyon olsun ve (4.27) ve (4.28) ifadelerini sağlasın. Bu durumda

$$M^\sharp(T_\Omega f)(x) \leq C(n,s)(M|f|^s)(x), x \in \mathbb{R}^n$$

eşitsizliği sağlanır. (**Sadosky, 1979**)

KAYNAKLAR

[1] Adams, D. R.; *A note on Riesz potentials, Duke Math. J.* 42, **1975**, 765-778.

[2] Calderon, A.P.; Zygmund, A.; *A note on singular integrals, Studia Math.,* 65, **1979**, 77-87.

[3] Dunford, N.; Schwartz, J. T.; *Linear operators,Wiley-Interscience*, **1958**, vol. I.(Kitakyushu, **2003**), 323-333. Yokohama Publishers, Yokohama, **2004.**

[4] Grafakos, L.; *Classical and modern Fourier analysis. Pearson Education, Inc., Upper Saddle River, NJ,* **2004.**

[5] Hedberg, L.I.; *On certain convolution inequalies, Proc. Amer. Math. Soc.* 36, **1972**, 505-510.

[6] Kreyszig, E.; *Introductory Functional Analysis with applications. John Willey and Sons, New York,* **1987.**

[7] Lu, S.; Ding,Y.; Yan,D.; *Singular Integrals and Related Topics. World Sci. Pub., Beijing,* **2006.**

[8] Pick, L.; Kufner, A.; John, O.; Fucík, S.; *Function Spaces*, 1. Berlin, Boston: De Gruyter, **2012**.

[9] Royden, H.L.; *Real Analysis, MacMillan, New York, 2nd ed.,* **1968.**

[10] Rudin, W.; *Principles of mathematical analysis. Third edition. International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill Book Co., New York-Auckland-Düsseldorf,* **1976.**

[11] Rudin, W.; *Real and complex analysis. Third edition. McGraw-Hill Book Co., New York,* **1987.**

[12] Rudin, W.; *Functional analysis. Second edition. International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill, Inc., New York,* **1991**.

[13] Sadosky, C.; *Interpolation of operators and Singular integrals, Marcel Dekker Inc.,* **1979**.

[14] Seeley, R.; *An Estimate Near the Boundary for the Spectral Function of the Laplace Operator, American Journal of Mathematics*, 102 (5), **1980**, 869-902.

[15] Stein, E.M.; *Note on the class LlogL, Studia Math.*, 32, **1969**, 305-310.

[16] Stein, E. M.; *Singular integrals and differentiability properties of functions. Princeton Mathematical Series, No. 30 Princeton University Press, Princeton, N.J.* **1970**.

[17] Stein, E. M.; Shakarchi, R.; *Real analysis. Measure theory, integration, and Hilbert spaces. Princeton Lectures in Analysis, III. Princeton University Press, Princeton, NJ*, **2005.**

ÖZGEÇMİŞ

Adı ve Soyadı	:	Süleyman ÇELİK
Doğum Yeri	:	Erzurum-İspir
Doğum Tarihi	:	20.12.1972
Medeni Hali	:	Evli
Yabancı Dili	:	İngilizce
Eğitim Durumu		**(Kurum ve Yıl)**
Yüksek Lisans	:	İstanbul Ticaret Üniversitesi Fen-Bilimler Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı (Şubat 2015 , ...)
Lisans	:	Fırat Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü (Eylül 1994)
Lise	:	Bursa Süleyman Çelebi Lisesi (Haziran 1989)
Ortaokul	:	Kestel Ortaokulu (Haziran 1986)
İlkokul	:	Gemlik Şehit Cemal İlkokulu (Haziran 1983)
İş Deneyimi		
2015-...	:	Ahi Evran Üniversitesi, Mucur Meslek Yüksekokulu Bankacılık ve Finans Bölümü Öğr. Gör.
2013-2015	:	Devran Koleji Öğretmenlik
2004-2013	:	Doğa Kolejleri ve Harput Kolejlerinde Öğretmenlik, İdarecilik ve Üst Düzey Yöneticilik
1994-2004	:	Gelişim 2000, Akademi, Düzey Dershanelerinde Öğretmenlik, İdarecilik