T.C.

AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BANACH FONKSİYON UZAYLARI

Kasım Emre AKSOY

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

KIRŞEHİR 2016

T.C.

AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BANACH FONKSİYON UZAYLARI

Kasım Emre AKSOY

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DANIŞMAN

Prof. Dr. Vagif S. GULİYEV

KIRŞEHİR 2016

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü'ne

Bu çalışma jürimiz tarafından MATEMATİK Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Başkan
Prof. Dr. Ayhan ŞERBETÇİ

Üye
Prof. Dr. Vagif S. GULİYEV

Üye
Doç. Dr. Ali AKBULUT

Onay
Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

.../.../2016

Prof. Dr. Levent KULA
Enstitü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Yüksek Lisans tezi olarak sunduğum ”Banach Fonksiyon Uzayları” başlıklı çalışmamın, akademik kurallara ve etik değerlere uygun olarak yazıldığını, yararlandığım eserlerin kaynaklarda eksiksiz olarak gösterildiğini ve çalışmamın içinde kullanıldıkları her yerde bunlara atıf yapıldığını bildiririm.

Kasım Emre AKSOY

ÖZET

BANACH FONKSİYON UZAYLARI

Yüksek Lisans Tezi

Kasım Emre AKSOY

Ahi Evran Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Ekim 2016

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.

İkinci bölümde, bu çalışma ile ilgili fonksiyon uzayları ve operatörler hakkında bazı temel kavramlara yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde, Banach fonksiyon uzaylarının tanımı ve bazı temel özellikleri verilmiştir.

Dördüncü bölümde, maksimal operatörü ve Hilbert dönüşümünün Banach fonksiyon uzaylarındaki sınırlılıkları detaylı bir şekilde incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler	:	Banach fonksiyon uzayları, L_p uzayları, Orlicz uzayları, Morrey uzayları, Hardy-Littlewood maksimal operatörü, Hilbert dönüşümü
Tez Yöneticileri	:	Prof. Dr. Vagif S. GULİYEV
Sayfa Adedi	:	**69**

ABSTRACT

BANACH FUNCTION SPACES

Master of Science Thesis

Kasim Emre AKSOY

Ahi Evran University
Institute of Science
October 2016

This thesis is consists of four chapters. The first chapter is devoted to the introduction.

In the second chapter, some basic concepts about function spaces and operators related to this study are given.

In the third chapter, the definition and some basic properties of Banach function spaces are given.

In the fourth chapter, the boundedness of maximal operator and Hilbert transform on Banach function spaces is investigated with all details.

Keywords	:	Banach function spaces, L_p spaces, Orlicz spaces, Morrey spaces, Hardy-Littlewood maximal operator, Hilbert transform
Supervisors	:	Prof. Dr. Vagif S. GULİYEV
Number of Pages	:	**69**

TEŞEKKÜR

Bu yüksek lisans tezimi hazırlarken, her ihtiyaç duyduğumda derin ve değerli bilgileriyle bana ışık tutan, beni tüm içtenliğiyle destekleyen, yardımlarını esirgemeyen, bana emek veren saygı değer hocam Prof. Dr. Vagif S. GULİYEV'e teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca, bugünlere ulaşmamda büyük emekleri olan sevgili aileme sonsuz şükranlarımı sunarım.

Kasım Emre AKSOY

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

SİMGELER VE KISALTMALAR

$\mathbb{R}^n$: $n-$boyutlu reel uzay

$(\mathcal{R}, \mu)$: Ölçü uzayı

$\mathcal{M}(\mathcal{R}, \mu)$: $\mathcal{R}$ üzerindeki tüm μ-ölçülebilir reel fonksiyonların kümesi

$\mathcal{M}_0(\mathcal{R}, \mu)$: Hemen her yerde sonlu $\mathcal{M}(\mathcal{R}, \mu)$ kümesindeki fonksiyonların sınıfı

$\mathcal{M}_+(\mathcal{R}, \mu)$: $\mathcal{M}_0(\mathcal{R}, \mu)$ kümesindeki negatif olmayan fonksiyonların sınıfı

$f \sim g$: g ile f denk ölçülebilir

$B(x, r)$: x merkezli r yarıçaplı yuvar

$L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$ $\mathbb{R}^n$ de lokal integrallenebilen fonksiyonların sınıfı

$L^p(\Omega)$: Lebesgue uzayı

$L^p(\Omega, \varrho)$: Ağırlıklı Lebesgue uzayı

$WL_p(\mathbb{R}^n)$: Zayıf Lebesgue uzayı

$L^{\Phi}(\Omega)$: Orlicz uzayı

$L_M^{p,\lambda}(\Omega)$: Morrey uzayı

$L_C^{p,\lambda}(\Omega)$: Campanato uzayı

M : Hardy-Littlewood maksimal operatörü

H : Hilbert dönüşümü

1 GİRİŞ

Fonksiyon uzaylarının modern teorisi S. L. Sobolev, A. Zygmund, S. M. Nikolskii, A. P. Calderon, V. Mazya, L. D. Kudryavtsev, N. Aronszayn, E. M. Stein, O. V. Besov, P. I. Lizorkin, H. Triebel ve V. I. Burenkov gibi dünyaca ünlü matematikçiler tarafından incelenmiştir. Bu teori reel ve fonksiyonel analizin birçok konusuna ve diğer matematiksel disiplinler içinde kısmi diferensiyel denklemler ve matematiksel fizik gibi bir çok alanlara başarıyla uygulanmıştır. Ayrıca ortaya çıkan yeni problemlerin çözülebilmesi ve fonksiyon uzaylarındaki bazı boşlukların giderilebilmesi için yeni tip fonksiyon uzaylarının tanımlanması ve araştırılması gerekmektedir. Lebesgue (L^p, $1 \le p \le \infty$) uzayları matematik analizin birçok alanında önemli bir rol oynamaktadır. Lebesgue uzayları, çoğunlukla fonksiyon uzayları üzerindeki operatörlerin özelliklerinin araştırılması ile ilgili olarak Kolmogorov, Zygmund, Titchmarsh ve diğer matematikçiler tarafından 1920'li yıllarda incelenmiştir. Böylece, yirminci yüzyılın ilk yarısında fonksiyon uzaylarında daha yeni ölçüler ortaya çıkmıştır. Young, Orlicz, Hardy, Littlewood, Zygmund, Halperin, Köthe, Marcinkiewicz, Lorentz, Lüksemburg, Morrey, Campanato ve diğer matematilçilerin çalışmaları ile fonksiyon uzaylarının daha geniş kapsamlı matematiksel bir disiplininin gelişimine olanak sağlanmıştır. Bununla beraber ölçülebilir fonksiyonların Banach uzaylarının çok kullanışlı başka sınıfları da vardır. Örneğin, Orlicz ve Lorentz uzaylarının daha geniş sınıfları esaslı öneme sahiptir (Bakınız [2], [12], [13] ve [16]).

Banach fonksiyon uzayları, ölçülebilir fonksiyonların Banach uzaylarıdır. Bu uzayın normu bir özel tanımlanan ölçüye bağlıdır. Bu uzaylar fonksiyonel-analitik ve ölçü-teorik teknikler arasında faydalı bir etkileşime izin verir (Bakınız [2], [16] ve [18]). Ölçülebilir fonksiyonların çoğu somut uzayları (Orlicz, Lorentz ve Marcinkiewicz uzayları vb.) genel Banach fonksiyon uzaylarının bakış açısından elde edilmiştir. Banach fonksiyon uzayları teorisi Lebesgue, Orlicz ve Morrey uzayları ve onların çeşitli modifikasyonları dahil olmak üzere fonksiyon uzaylarının ölçüleri ile ilgili birçok önemli özelliği içeren bir yapıdır. Ayrıca, Lorentz uzayları ve Lorentz uzaylarının çok önemli bir sınıfını ve ayrıca yeniden düzenleme altında değişmez kalan uzayları da kapsamaktadır (Bakınız [8], [22] ve [27]).

Banach fonksiyon uzayları fikri 1950'li yıllarda ortaya konuldu ve bu güne kadar yoğun bir şekilde çalışıldı. A. C. Zaanen ve çalışma arkadaşları bu alana esaslı katkıda bulunmuşlardır (Bakınız [38] ve [39]). A. C. Zaanen'in doktora öğrencilerinden W. A. J. Luxemburg 1955 yılında, M. A. Kaashoek 1964'te ve J. J. Grobler 1970 yılında Banach fonksiyon uzayları üzerine birer tez yazmışlardır. 1960'ların ortalarında W. A. J. Luxemburg ve A. C. Zaanen tarafından "The Notes of Banach Function Spaces" başlığıyla tarihsel bir dizi bildiri (Proc. Acad. Sci. Amsterdam, Ser. A, 1963-65) yayınlandı. Bu bildiriler, Banach fonksiyon uzayları teorisi ve vektör latislerin(Bir sıralama bağıntısıyla tanımlı latis ile verilen bir kısmi sıralı reel vektör uzayı) teorisinin bir sentezini üretmede yeni araştırmalara ufuk açmış bu da fonksiyonel analiz, cebir ve ölçü teorinin birlikte çalışılması için uygun bir ortam sağlamıştır.

İntegral ve diferensiyel operatörlerin farklı norm eşitsizlikleri fonksiyon uzaylarının teorisinde ve onların uygulamalarında esaslı öneme sahiptir. Özellikle diferensiyellenebilir fonksiyonların klasik uzayları teorisi (Sobolev uzayları, Besov uzayları, ağırlıklı Besov tipi uzaylar, vb.) bu eşitsizlikler üzerine esaslı olarak inşa edilirler. Yakın zamanlarda integral ve diferensiyel operatörler için norm eşitsizlikleri ile ilgili birçok zor problemler çözülmüştür. Bu sonuçlar fonksiyonel analizin özellikle de geniş olarak lineer ve lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlere uygulamaları için temel araçlar olmuştur. Harmonik analizin klasik operatörleri olan maksimal fonksiyon, Riesz potansiyeli ve singüler integral operatörleri de Fourier dönüşümü teorisinde, kısmi türevli denklemler teorisinde, olasılık teorisinde (Markov süreçleri için potansiyel fonksiyonlar ve durağan rasgele süreçlerin spektral yoğunluk fonksiyonları çalışmalarında), fonksiyonel analizde ve özel olarak operatörlerin interpolasyonu teorisinde geniş uygulamalara sahiptir.

Bu tez çalışması dört bölümden oluşmaktadır. İkinci bölümde, çalışmamız ile ilgili fonksiyon uzayları ve operatörler hakkında bazı temel kavramlara yer verilmiştir. Üçüncü bölümde, Banach fonksiyon uzaylarının tanımı ve bazı temel özellikleri verilmiştir. Dördüncü bölümde, maksimal operatör ve Hilbert dönüşümünün Banach fonksiyon uzaylarındaki sınırlılıkları detaylı bir şekilde incelenmiştir.

2 TEMEL KAVRAMLAR

2.1 Normlu Uzaylar

Tanım 2.1.1 X, $\mathbf{K}$ cismi üzerinde tanımlı bir vektör uzayı olsun. Eğer

$$\|\cdot\| : X \to R, \quad x \to \|x\|$$

dönüşümü $\forall x, y \in X$ ve $\alpha \in \mathbf{K}$ için

(N_1) $\|x\| \geq 0$ ve $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$

(N_2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$

(N_3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Üçgen Eşitsizliği)

özelliklerini sağlıyorsa bu dönüşüme X üzerinde norm adı verilir. $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine bir normlu vektör uzayı denir. $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayı kısaca X ile gösterilir (**Alp ve Musayev, 2000**).

Teorem 2.1.2 X, $\mathbf{K}$ cismi üzerinde tanımlı bir vektör uzayı olsun.

$$\| \cdot \| : \mathrm{X} \to \mathbb{R}$$

şeklinde tanımlı her norm dönüşümü X vektör uzayı üzerinde süreklidir (**Alp ve Musayev, 2000**).

Teorem 2.1.3 Bir $\mathbf{K}$ cismi üzerinde tanımlı herhangi bir X normlu vektör uzayında vektörel toplama ve skalerle çarpma dönüşümleri süreklidir (**Alp ve Musayev, 2000**).

Tanım 2.1.4 (Denk Norm) X, $\mathbf{K}$ cismi üzerinde tanımlı bir vektör uzayı olsun. $\forall x \in X$ için

$$c\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C\|x\|_1$$

olacak şekilde $c, C \in \mathbb{R}$ pozitif sayıları varsa X üzerinde tanımlı $\| \cdot \|_1$ ve $\| \cdot \|_2$ normlarına denk normlar denir (**Rudin, 1991**).

Tanım 2.1.5 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, (X, $\| \cdot \|$) normlu uzayında bir dizi ve $x_0 \in X$ olsun. Eğer

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x_0\| = 0$$

olursa x_n dizisi x_0 noktasına yakınsıyor denir ve $x_n \to x_0$ veya $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ şeklinde gösterilir. Normlu uzayda tanımlanan bu yakınsamaya norma göre yakınsama denir (**Rudin, 1991**).

Tanım 2.1.6 (Cauchy Dizisi) $(\mathrm{X}, \|\cdot\|)$ normlu uzayı içinde $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ bir dizi olsun. $\forall\varepsilon > 0$ için $m, n \geq n_\varepsilon$ olduğunda $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$ olacak şekilde ε sayısına bağlı bir n_ε doğal sayısı varsa $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, bir Cauchy dizisidir denir (**Rudin, 1991**).

Tanım 2.1.7 (Banach Uzayı) Bir $(\mathrm{X}, \|\cdot\|)$ normlu uzayı içindeki her Cauchy dizisi X içindeki bir noktaya yakınsıyor ise bu $(\mathrm{X}, \|\cdot\|)$ normlu uzayına Banach Uzayı adı verilir (**Alp ve Musayev, 2000**).

Tanım 2.1.8 (Riesz-Fischer özelliği) Eğer

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|u_n\|_X < \infty \tag{2.1}$$

özelliğine sahip her $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ için $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = u$ olacak şekilde bir $u \in X$ varsa, yani

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{k=1}^{n} u_k - u \right\|_X = 0$$

oluyorsa $(X, \|\cdot\|_X)$ uzayına Riesz-Fisher özelliğini sağlıyor denir (**Pick vd., 2012**).

Teorem 2.1.9 Bir normlu lineer uzayın tam olması için gerek ve yeter şart Riesz-Fischer özelliğine sahip olmasıdır (**Pick vd., 2012**).

2.2 Operatör Teorisi

Tanım 2.2.1 X ve Y iki lineer uzay ve $T : D_T \subset X \to Y$ bir fonksiyon olsun. T fonksiyonuna operatör denir. Burada D_T, T nin tanım kümesi ve $\mathfrak{R} \equiv T(D_T) \subset Y$ de T nin görüntü kümesidir (**Alp ve Musayev, 2000**).

Tanım 2.2.2 $\mathbb{R}^n$ üzerinde ölçülebilir fonksiyonlar kümesinin bir lineer alt uzayı G olmak üzere $T : G \to G$ operatörü $\forall f, g \in G$ ve $\forall\lambda \in \mathbb{R}$ için

$$T(f+g) = T(f) + T(g) \quad \text{ve} \quad T(\lambda f) = \lambda T(f)$$

şartlarını sağlıyorsa lineer operatör,

$$|T(f+g)| \leq |T(f)| + |T(g)| \quad \text{ve} \quad |T(\lambda f)| = |\lambda|\, |T(f)|$$

şartlarını sağlıyorsa altlineer operatör, bir $C > 0$ sabiti için

$$|T(f+g)| \leq C\left(|T(f)| + |T(g)|\right) \quad \text{ve} \quad |T(\lambda f)| = |\lambda|\, |T(f)|$$

şartlarını sağlıyorsa quasilineer operatör olarak adlandırılır (**Alp ve Musayev, 2000**).

Tanım 2.2.3 $T : X \to X$ operatörü verilsin. $\forall x \in X$ için $T(x) = x$ ise T operatörüne birim(veya özdeşlik) operatörü denir. I_X veya I ile gösterilir (**Alp ve Musayev, 2000**).

Tanım 2.2.4 X ve Y iki normlu uzay ve $D(T) \subset X$ olmak üzere $T : D(T) \to Y$ lineer operatör olsun. Eğer $\forall x \in D(T)$ için,

$$\|Tx\| \leq C\|x\|$$

olacak şekilde bir C reel sayısı varsa, T operatörüne sınırlıdır denir. Bir T operatörünün normu

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in D(T) \\ x \neq 0}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}$$

şeklinde tanımlanır (**Alp ve Musayev, 2000**).

Tanım 2.2.5 X ve Y iki normlu uzay ve $T : D(T) \to Y$ operatörü verilsin. Aşağıdaki şartlar sağlandığında T operatörü $x_0 \in D(T)$ noktasında süreklidir denir.

(a) $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta > 0 \ni \forall x \in D(T),\ \|x - x_0\| < \delta$ iken

$$\|Tx - Tx_0\| < \varepsilon.$$

(b) x_0 noktasına yakınsayan $\forall (x_n) \subset D(T)$ dizisi için

$$\lim_{n \to \infty} T(x_n) = T(x_0).$$

(**Alp ve Musayev, 2000**).

Tanım 2.2.6 Eğer $T : X \to Y$ operatörü $D(T)$ nin her noktasında sürekli ise T operatörü $D(T)$ üzerinde süreklidir denir (**Alp ve Musayev, 2000**).

Tanım 2.2.7 X ve Y normlu uzaylar ve $D(T) \subset X$ olmak üzere $T : D(T) \to Y$ lineer operatör olsun. Bu durumda T operatörünün sürekli olması için gerek ve yeter koşul T operatörünün sınırlı olmasıdır (**Alp ve Musayev, 2000**).

Tanım 2.2.8 (Gömme) X ve Y iki normlu lineer uzay ve $X \subset Y$ olsun.

$$D_T(I) = \Re(I) = X,$$

yani $\forall x \in X$ için $I(x) = x$ olacak şekilde Y de en az bir eleman olmak üzere

$$\mathrm{I} : X \to Y$$

ile verilen operatöre birim operatörü denir. Bu operatör sürekli ise yani her $x \in X$ için

$$\|x\|_Y \leq c\|x\|_X$$

olacak şekilde bir $c > 0$ sabiti var ise X uzayı Y uzayına sürekli gömülür denir. I operatörüne X uzayından Y uzayına bir gömme operatörü denir. Alternatif olarak bazen X uzayının Y uzayına bir sürekli(veya sınırlı) gömmesi mevcuttur denir.

$$\|\mathrm{I}\|_{X\hookrightarrow Y} := \sup_{f\neq 0} \frac{\|f\|_Y}{\|f\|_X}$$

şeklinde gösterilen bu sayıya da I nın operatör normu denir. Eğer X ve Y iki normlu lineer uzay olmak üzere X uzayından Y uzayına bir sürekli gömme mevcut ise

$$X \hookrightarrow Y$$

şeklinde gösterilir. Eğer

$$X \hookrightarrow Y \text{ ve } Y \hookrightarrow X$$

aynı anda oluyorsa,

$$X \rightleftarrows Y$$

şeklinde gösterilir ve eğer bu gömme operatörü kompakt ise de

$$X \hookrightarrow\hookrightarrow Y$$

şeklinde gösterilir (**Pick vd., 2012**).

Tanım 2.2.9 (Konveks) Bir X vektör uzayının bir Y alt kümesi verilsin. Eğer $y_1, y_2 \in Y$ olduğunda

$$M = \{y \in X : y = \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2,\ 0 \leq \lambda \leq 1\} \subset Y$$

oluyorsa, Y alt kümesi konvekstir(veya dışbükeydir) denir (**Alp ve Musayev, 2000**).

2.3 Ölçü Teorisi

X boştan farklı bir küme olmak üzere X kümesinin bütün alt kümelerinden oluşan küme $P(X)$ ile gösterilmiştir.

Tanım 2.3.1 (Cebir ve $\sigma-$Cebir) X boştan farklı bir küme ve $\mathcal{A} \subset P(X)$ olsun.

(i) $\emptyset, X \in \mathcal{A}$

(ii) $\forall E \in \mathcal{A},\ E^c = X \backslash E \in \mathcal{A}$

(iii) $\forall k = 1, 2, \ldots, n,\ \{E_k\}_{k=1}^{\infty} \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{n} E_k \in \mathcal{A}$

şartları sağlanıyor ise bu durumda $\mathcal{A}$ sınıfına X üzerinde bir cebirdir denir. Eğer (iii) şartı yerine

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \{E_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{A} \tag{2.2}$$

şartı alınırsa $\mathcal{A}$ cebirine bir σ-cebir denir (**Royden, 1968**).

Teorem 2.3.2 $\emptyset \neq \mathcal{K} \in X$ olsun. $\mathcal{K}$ sınıfını kapsayan $\sigma-$cebirlerinin bir en küçüğü vardır (**Royden, 1968**).

Tanım 2.3.3 (Borel Cebiri) Bir $\mathcal{K}$ sınıfını kapsayan σ-cebirlerinin en küçüğüne $\mathcal{K}$ nın ürettiği(veya doğurduğu) σ-cebiri denir ve $D(\mathcal{K})$ ile gösterilir. $\mathbb{R}^n$ deki bütün açık (a, b) aralıklarının doğurduğu σ-cebirine Borel cebiri denir ve $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ ile gösterilir. $n = 1$ olması halinde $\mathcal{B}(\mathbb{R}^1)$ Borel cebiri $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ ile gösterilir. $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ nin herbir elemanına Borel kümesi denir (**Royden, 1968**).

Tanım 2.3.4 (Ölçü) $(X, \mathcal{A})$ bir ölçülebilir uzay olsun. $\mathcal{A}$ üzerinde tanımlı genişletilmiş reel değerli bir μ fonksiyonu

(i) $\mu(\emptyset) = 0$

(ii) $\forall A \in \mathcal{A},\ \mu(A) \geq 0$

(iii) Her ayrık $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ için $\mu(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$

özelliklerini sağlıyorsa bu fonksiyona ölçü fonksiyonu(veya ölçü) adı verilir. Eğer her $A \in \mathcal{A}$ için $\mu(A) < \infty$ oluyorsa μ ye sonlu ölçü adı verilir. X kümesi herbiri sonlu ölçüye sahip sayılabilir adetteki kümelerin birleşimi olarak yazılabiliyorsa μ ölçüsüne σ-sonlu denir. Eğer $\mu(X) = 1$ ise bu ölçüye olasılık ölçüsü adı verilir (**Royden, 1968**).

Tanım 2.3.5 (Ölçü Uzayı) X, boştan farklı bir küme, $\mathcal{A} \subset P(X)$ de X in bir $\sigma-$cebiri ve $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty)$ de $\mathcal{A}$ üzerinde bir ölçü olsun. $(X, \mathcal{A})$ ikilisine bir ölçülebilir uzay ve $(X, \mathcal{A}, \mu)$ üçlüsüne de bir ölçü uzayı denir. $\mathcal{A}$ daki herbir eleman da ölçülebilir küme olarak adlandırılır (**Royden, 1968**).

Tanım 2.3.6 (Atomik Ölçü) $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı olsun. Eğer $\mu(A) > 0$ ve her $B \in \mathcal{A}$ kümesi için $B \subset A$ ise ya $\mu(B) = 0$ yada $\mu(A \backslash B) = 0$ olacak şekildeki bir $A \in \mathcal{A}$ kümesine atom denir. Eğer $\mu(X \backslash M) = 0$ olacak şekilde bir $M \subset X$ kümesi mevcutsa ve her $x \in M$ için $\mu(\{x\}) \neq 0$ ise bu $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ölçü uzayı bütünüyle atomik(veya sadece atomik veya ayrık) diye adlandırılır. Şayet $\mathcal{A}$ da herhangi bir atom mevcut değil ise $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ölçü uzayı atomik olmayan diye adlandırılır (**Pick vd., 2012**).

Örnek 2.3.7 X boştan farklı bir küme ve $\mathcal{A} := P(X)$ olsun. $A \in \mathcal{A}$ için

$$\mu(A) := \begin{cases} A \text{ nın elemanlarının sayısı}, & A \text{ sonlu} \\ \infty, & A \text{ sonsuz} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan μ bir ölçüdür. Bu ölçüye X üzerinde sayma ölçüsü denir.

Teorem 2.3.8 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı olsun.

1. $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\mathcal{A}$ daki elemanların artan bir dizisi ise

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n). \tag{2.3}$$

2. $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\mathcal{A}$ daki elemanların bir azalan dizisi ve $\mu(B_1) < \infty$ ise

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n) \tag{2.4}$$

(**Rudin, 1987**).

Sonuç 2.3.9 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı olsun.

1. $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\mathcal{A}$ daki elemanların bir artan dizisi ise

$$\mu(\lim_{n\to\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n). \tag{2.5}$$

2. $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\mathcal{A}$ daki elemanların bir azalan dizisi ve $\mu(B_1) < \infty$ ise

$$\mu(\lim_{n\to\infty} B_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n) \tag{2.6}$$

(**Rudin, 1987**).

Teorem 2.3.10 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı olsun. $\mathcal{A}$ ya ait kümelerin herhangi bir dizisi $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ olmak üzere

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) \tag{2.7}$$

(**Rudin, 1987**).

Tanım 2.3.11 (Dış Ölçü) X boştan farklı bir küme olsun. $\mathrm{P}(X)$ üzerinde tanımlı genişletilmiş reel değerli bir μ^* fonksiyonu için

(i) $\mu^*(\emptyset) = 0$

(ii) $\forall \mathrm{E} \in \mathrm{P}(X),\ \mu^*(E) \geq 0$

(iii) $A \subset B \subset X,\ \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$

(iv) $\forall n \in \mathbb{N},\ A_n \in \mathrm{P}(X) \Rightarrow \mu^*(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}) \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$

şartları sağlanırsa μ^* fonksiyonuna X üzerinde bir dış ölçü denir (**Royden, 1968**).

Tanım 2.3.12 (Lebesgue Dış Ölçüsü) $\{I_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\mathbb{R}$ nin sınırlı ve açık alt aralıklarının bir dizisi ve

$$\tau_A = \left\{(I_k) : A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k\right\}$$

olsun. $P(\mathbb{R})$ üzerinde

$$\lambda^*(A) = \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty} l(I_k) : (I_k) \in \tau_A\right\}$$

şeklinde tanımlanan λ^* bir dış ölçüdür. Bu dış ölçüye Lebesgue dış ölçüsü adı verilir. Lebesgue dış ölçüsü $\mathbb{R}$ nin her bir alt aralığına onun uzunluğunu karşılık getirir.
$n-$boyutlu $\mathbb{R}^n$ uzayında Lebesgue dış ölçüsünü tanımlamak için

$$I = \{x : a_i \leq x_i \leq b_i\ ,\quad i = 1, ..., n\}$$

$n-$boyutlu kapalı aralıklarını göz önüne alalım. Bu aralıkların hacimleri

$$v(I) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$$

biçimindedir. Keyfi bir $E \subset \mathbb{R}^n$ kümesinin Lebesgue dış ölçüsü

$$\lambda^*(E) = \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty} v(I_k) : E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k\ ,\ I_k \text{ bir aralık}\right\}$$

ile tanımlanır. $\forall A \subset \mathbb{R}^n$ için eğer

$$\lambda^*(A) = \lambda^*(A \cap E) + \lambda^*(A \cap (\mathbb{R}^n - E)) \qquad (\textbf{Caratheodary Ölçümü})$$

ise E kümesine Lebesgue ölçülebilirdir denir (**Royden, 1968**).

Teorem 2.3.13 $\mathbb{R}^n$ üzerindeki Lebesgue dış ölçüsü her bir aralığa onun hacmini karşılık getirir (**Royden, 1968**).

Sonuç 2.3.14 A sayılabilir bir küme ise $\lambda^*(A) = 0$.

Sonuç 2.3.15 $[0, 1]$ kümesi sayılamayan bir kümedir.

Tanım 2.3.16 (Lebesgue Ölçüsü) $\mathcal{M}(\mathbb{R}, \lambda^*)$, λ^* dış ölçüsüne göre ölçülebilen $\mathbb{R}$ nin alt kümelerinin bir sınıfı olsun. λ^* Lebesgue dış ölçüsünün $\mathcal{M}(\mathbb{R}, \lambda^*)$ sınıfına da $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ sınıfına da olan kısıtlanmasına Lebesgue ölçüsü denir, λ ile gösterilir (**Royden, 1968**).

Tanım 2.3.17 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir $\sigma-$sonlu ölçü uzayı ve $A \in \mathcal{A}$ olsun. Eğer,

$$E := \{x \in A :\ V(x) \text{ doğru değildir}\}$$

ile gösterilen bir küme

$$E \subset \mathcal{A} \ \text{ ve } \ \mu(E) = 0$$

şartlarını sağlıyorsa $V(x)$, A üzerinde (veya hemen her $x \in A$ için) μ ile bağlantılı olarak hemen her yerde (veya h.h.y) doğrudur denir (**Pick vd., 2012**).

Teorem 2.3.18 (Levi Monoton Yakınsaklık Teoremi) $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, ölçülebilir $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ kümesi üzerinde integrallenebilir fonksiyonların bir dizisi olsun. Öyle ki $\forall n \in \mathbb{N}$ ve hemen her $x \in \Omega$ için

$$f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$$

olmak üzere

$$\int_{\Omega} f_1(x)\mathrm{d}x > -\infty.$$

Bu durumda hemen her $x \in \Omega$ için

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

limiti mevcut olup f fonksiyonu integrallenebilirdir ve

$$\int_{\Omega} \lim_{n\to\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \int_{\Omega} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_{\Omega} f_n(x)\mathrm{d}x$$

eşitliği gerçeklenir (**Pick vd., 2012**).

Teorem 2.3.19 (Radon-Nikodým) $v \in AC[\mu]$ sonlu bir fonksiyon kümesi olsun. Bu durumda Ω üzerinde sonlu Lebesgue integraline sahip bir f fonksiyonu kesinlikle mevcuttur, öyle ki her $E \subset \Omega$ Lebesgue ölçülebilir alt kümeleri için

$$v(E) = \int_{E} f(x)\mathrm{d}x$$

(**Pick vd., 2012**).

Tanım 2.3.20 $(X, \mathcal{A})$ bir ölçülebilir uzay olsun. $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu ölçülebilir olması için gerek ve yeter koşul $\forall\alpha \in \mathbb{R}$ için

$$f^{-1}((\alpha, +\infty)) = \{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{A}$$

olmasıdır (**Royden, 1968**).

Şimdi yukardaki tanımda geçen kümelerin şeklini değiştirmeye olanak veren bir lemmayı ifade edelim.

Lemma 2.3.21 $(X, \mathcal{A})$ bir ölçülebilir uzay olsun. $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için

(i) $\forall\alpha \in \mathbb{R}$, $A_\alpha = \{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{A}$

(ii) $\forall\alpha \in \mathbb{R}$, $B_\alpha = \{x \in X : f(x) \leq \alpha\} \in \mathcal{A}$

(iii) $\forall\alpha \in \mathbb{R}$, $C_\alpha = \{x \in X : f(x) \geq \alpha\} \in \mathcal{A}$

(iv) $\forall\alpha \in \mathbb{R}$, $D_\alpha = \{x \in X : f(x) < \alpha\} \in \mathcal{A}$

önermeleri denktir (**Royden, 1968**).

Teorem 2.3.22 f ve g ölçülebilir fonksiyonlar ve $c \in \mathbb{R}$ olsun.

$$cf, \quad f^2, \quad \text{f+g}, \quad \text{f.g}, \quad |f|$$

fonksiyonları da ölçülebilirdir (**Royden, 1968**).

Tanım 2.3.23 $(X, \mathcal{A})$ bir ölçülebilir uzay ve $A \in \mathcal{A}$ olsun.

$$f : A \to \overline{\mathbb{R}} \text{ ölçülebilirdir } \Leftrightarrow \forall \alpha \in \mathbb{R}, \ f^{-1}((\alpha, +\infty]) = \{x \in A : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{A}$$

olmalıdır. X kümesi üzerinde tanımlı, genişletilmiş reel değerli $\mathcal{A}$ ölçülebilir bütün fonksiyonların kümesi $M(X, \mathcal{A})$ ile gösterilir. Eğer $f \in M(X, \mathcal{A})$ ise

$$\begin{aligned} A &= \{x \in X : f(x) = +\infty\} \\ &= \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X : f(x) > n\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= \{x \in X : f(x) = -\infty\} \\ &= \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X : f(x) \leq -n\} \\ &= \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X : f(x) > -n\} \right)^c \end{aligned}$$

olacağından A ve B ölçülebilirdir (**Royden, 1968**).

Teorem 2.3.24 $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ ölçülebilirdir $\Longleftrightarrow$

$$A = \{x \in X : f(x) = +\infty\},$$

$$B = \{x \in X : f(x) = -\infty\}$$

kümeleri ve

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x), \ x \notin A \cup B \\ \quad 0, \ x \in A \cup B \end{cases} \tag{2.8}$$

biçiminde tanımlanan reel değerli f_1 fonksiyonu ölçülebilirdir (**Alp ve Musayev, 2000**).

Tanım 2.3.25 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ Borel cebirine göre ölçülebilen bir fonksiyona Borel ölçülebilir fonksiyon(veya Borel fonksiyonu) adı verilir. $\mathcal{M}(\mathbb{R}, \lambda^*)$ $\sigma-$cebirine göre ölçülebilen bir fonksiyona Lebesgue ölçülebilir fonksiyon denir. $\mathbb{R}$ nin Borel kümesi olmayan fakat Lebesgue ölçülebilir alt kümeleri mevcut olduğundan $\mathbb{R}$ üzerinde herbir Borel ölçülebilir fonksiyon Lebesgue ölçülebilirdir (**Royden, 1968**).

Tanım 2.3.26 $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ olsun.

$$f^{+}(x) = \max\{f(x), 0\}$$

$$f^{-}(x) = \max\{-f(x), 0\}$$

biçiminde tanımlanan f^{+} ve f^{-} fonksiyonları da X üzerinde tanımlı ve negatif olmayan fonksiyonlardır. f^{+} fonksiyonuna f nin pozitif parçası, f^{-} fonksiyonuna da f nin negatif parçası denir.

Bu durumda, tanımdan

$$f = f^{+} - f^{-}, \qquad |f| = f^{+} + f^{-},$$
$$f^{+} = \frac{1}{2}(|f| + f), \qquad f^{-} = \frac{1}{2}(|f| - f)$$

bağıntıları mevcuttur (**Royden, 1968**).

Teorem 2.3.27 $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ ölçülebilir olması için gerek ve yeter şart f^{+} ve f^{-} fonksiyonlarının ölçülebilir olmasıdır (**Royden, 1968**).

Teorem 2.3.28 $(X, \mathcal{A})$ bir ölçülebilir uzay ve $A \in \mathcal{A}$ olsun. $f, g : A \to \overline{\mathbb{R}}$ ölçülebilir ise bu durumda

$$\{x \in A : f(x) < g(x)\}, \ \ \{x \in A : f(x) \leq g(x)\}, \ \ \{x \in A : f(x) = g(x)\}$$

kümeleri ölçülebilirdir (**Royden, 1968**).

Teorem 2.3.29 $(X, \mathcal{A})$ bir ölçülebilir uzay ve $A \in \mathcal{A}$ olsun. $f, g : A \to \overline{\mathbb{R}}$ ölçülebilir ise $(f \vee g)$ ve $(f \wedge g)$ fonksiyonları ölçülebilirdir (**Royden, 1968**).

Teorem 2.3.30 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, $A \in \mathcal{A}$ üzerinde tanımlı $\overline{\mathbb{R}}$-değerli ölçülebilir fonksiyonların bir dizisi ise $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$ ve $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$ fonksiyonları da ölçülebilirdir (**Royden, 1968**).

Teorem 2.3.31 $(X, \mathcal{A})$ bir ölçü uzayı ve $A \in \mathcal{A}$ olsun. $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\mathcal{A}$ üzerinde tanımlı $\overline{\mathbb{R}}$-değerli ölçülebilir fonksiyonların bir dizisi ise $\liminf\limits_{n\to\infty} f_n$ ve $\limsup\limits_{n\to\infty} f_n$ fonksiyonları ölçülebilirdir.

Ayrıca tanım kümesi $A_0 = \{x \in A : \limsup\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \liminf\limits_{n\to\infty} f_n(x)\}$ olan $\lim\limits_{n\to\infty} f_n$ fonksiyonu da ölçülebilirdir (**Royden, 1968**).

Tanım 2.3.32 (Karakteristik Fonksiyon) X boştan farklı bir küme ve $E \subset X$ olsun.

$$\chi_{E(x)} := \begin{cases} 1\,, & x \in E \\ 0\,, & x \notin E \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $\chi_{E(x)} : X \to [0, \infty)$ fonksiyonuna E kümesinin karakteristik fonksiyonu denir (**Pick vd., 2012**).

Şimdi, negatif olmayan ölçülebilir basit fonksiyonların integrali, daha sonra da negatif olmayan, $\overline{\mathbb{R}}$-reel değerli, ölçülebilir fonksiyonların integrali ile ilgili bilgiler verilecektir. Sonra da $\overline{\mathbb{R}}$-değerli fonksiyonların integrali üzerinde durulacaktır. Önce basit fonksiyonun tanımını verelim.

Tanım 2.3.33 Görüntü kümesi sonlu elemandan oluşan φ fonksiyonuna basit fonksiyon adı verilir (**Royden 1968**).

φ reel değerli bir basit fonksiyon ve χ_{E_k}, E_k kümesinin karakteristik fonksiyonu olmak üzere

$$\varphi = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{\mathrm{E}_k}, \quad a_k \in \mathbb{R} \tag{2.9}$$

biçiminde yazılabilir. Eğer φ fonksiyonu X üzerinde tanımlı ise

$$\bigcup_{k=1}^{n} \mathrm{E}_k = X.$$

Burada E_k kümelerinin seçilişi tek olmadığından φ nin (2.9) tipindeki gösterimi tek değildir. Eğer $a_1, a_2, ..., a_m$ sayıları φ nin X üzerinde aldığı farklı değerler ve

$$\mathrm{E}_k = x \in X \quad ve \quad f(x) = a_k$$

seçilirse E_k kümeleri ayrık olur. Bu durumda

$$\varphi := \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{\mathrm{E}_k}$$

gösterimine φ fonksiyonunun standart gösterimi adı verilir. X üzerinde tanımlı, reel değerli, $\mathcal{A}$ ölçülebilir basit fonksiyonların kümesi $S = S(X, \mathcal{A})$, S deki negatif olmayan fonksiyonların kümesi S^+ ile gösterilir (**Royden, 1968**).

Tanım 2.3.34 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı olsun. a_k sayıları negatif olmayan reel sayılar ve $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ler $\mathcal{A}$ ya ait olmak üzere

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k = X \quad ve \quad \varphi = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{\mathrm{E}_k} \tag{2.10}$$

gösterimine sahip bir $\varphi \in S^+$ fonksiyonunun μ ölçüsüne göre integrali

$$\int_X \varphi d\mu = \sum_{k=1}^{n} a_k \mu(A_k) \tag{2.11}$$

(**Royden, 1968**).

Bu tanıma göre φ nin μ ye göre integrali ya negatif olmayan bir reel sayı ya da μ ölçüsünün sonlu olmayan bir ölçü olması haline karşılık gelen $+\infty$ değeridir. Belirtelim ki, φ fonksiyonunun μ ye göre integrali ne a_k sayılarına ne de A_k kümelerine bağlıdır. Bununla ilgili olarak aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 2.3.35 $(X,\mathcal{A},\mu)$ bir ölçü uzayı $\varphi \in S^+(X,\mathcal{A})$ ve A_k lar ayrık olmak üzere φ nin bir gösterimi $\varphi = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{A_k}$ olsun. φ nin μ ölçüsüne göre integrali ne a_k sayılarına ne de A_k kümelerine bağlıdır (**Royden, 1968**).

Şimdi negatif olmayan basit fonksiyonların integraline ait temel özellikleri verelim.

Teorem 2.3.36 $(X,\mathcal{A},\mu)$ bir ölçü uzayı, $\varphi \in S^+, \Psi \in S^+$ ve $c \geq 0$ olsun. Bu durumda

(i) $\int_X c.\varphi d\mu = c \int_{\mathcal{X}} \varphi d\mu$

(ii) $\int_X (\varphi + \Psi) d\mu = \int_X \varphi d\mu + \int_X \Psi d\mu$

(iii) $\forall x \in X,\ \varphi(x) \leq \Psi(x) \Rightarrow \int_X \varphi d\mu \leq \int_X \Psi d\mu$

şartları sağlanır (**Royden, 1968**).

Tanım 2.3.37 $(X,\mathcal{A},\mu)$ bir ölçü uzayı ve $f \in M^+(X,\mathcal{A})$ olsun. f fonksiyonunun μ ölçüsüne göre integrali

$$\int_X f d\mu = \sup \int_X \varphi d\mu : \varphi \in S^+ \text{ ve } \varphi \leq f \tag{2.12}$$

genişletilmiş reel sayısıdır.

$E \in \mathcal{A}$ olsun. f nin μ ye göre E üzerindeki integrali

$$\int_X f d\mu = \int_X f \chi_E d\mu \tag{2.13}$$

şeklinde verilir (**Royden, 1968**).

Teorem 2.3.38 $f, g \in M^+(X,\mathcal{A})$ ve $\mathrm{E}, F \in \mathcal{A}$ olsun.

(i) $\forall x \in X,\ f(x) \leq g(x) \Rightarrow \int_X f d\mu \leq \int_X \mathrm{g} d\mu.$

(ii) $\mathrm{E} \subset F \Rightarrow \int_{\mathrm{E}} f d\mu \leq \int_F f d\mu$

şartları sağlanır (**Royden, 1968**).

Şimdi integral teorisinin temel teoremlerinden birini ifade edelim.

Teorem 2.3.39 (Monoton Yakınsaklık Teoremi) $(X,\mathcal{A},\mu)$ bir ölçü uzayı ve $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ de $M^+(X,\mathcal{A})$ daki fonksiyonların monoton artan bir dizisi olsun. f_n dizisi f fonksiyonuna yakınsak ise

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu \tag{2.14}$$

(**Pick vd., 2012**).

Teorem 2.3.40 (Lebesgue Baskın Yakınsaklık Teoremi) $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı ve $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ de $M^+(X, \mathcal{A})$ daki fonksiyonların bir dizisi olsun. Hemen her $x \in X$ için

$$|f_n(x)| \leq g(x)$$

olacak şekilde g bir integrallenebilir fonksiyon olsun. $f_n \to f$ ise $\forall n \in \mathbb{N}$ için f_n ve f integrallenebilirdir ve

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$$

(**Pick vd., 2012**).

Lemma 2.3.41 $(X, \mathcal{A})$ bir ölçülebilir uzay, $A \in \mathcal{A}$ ve $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonu ölçülebilir olsun. Bu taktirde A üzerinde tanımlı $\overline{\mathbb{R}}$-değerli, ölçülebilir basit fonksiyonların öyle bir artan φ_n dizisi vardır ki $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n = f$ olur. Eğer f sınırlı ise bu yakınsama düzgündür (**Royden 1968**).

Teorem 2.3.42 (i) $f \in M^+$ ve $c \geq 0 \Rightarrow cf \in M^+$ ve

$$\int_X cf d\mu = c \int_X f d\mu.$$

(ii) $f, g \in M^+ \Rightarrow f + g \in M^+$ ve

$$\int_X (f+g) d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu$$

(**Royden, 1968**).

Teorem 2.3.43 (Fatou Lemma) $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı ve f_n de $M^+(X, \mathcal{A})$ daki fonksiyonların bir dizisi ise

$$\int_X \lim_{n\to\infty} \inf f_n d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \inf \int_X f_n d\mu \tag{2.15}$$

(**Royden, 1968**).

Teorem 2.3.44 (Beppo-Levi Teoremi) $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı ve $\sum f_k$ da X üzerinde tanımlı $[0, +\infty]$ değerli ölçülebilir fonksiyonların bir serisi olsun. Bu durumda

$$\int_X \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k \right) d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_X f_k d\mu \right) \tag{2.16}$$

(**Royden, 1968**).

Tanım 2.3.45 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı ve $f \in M(X, \mathcal{A})$ olsun. Eğer $\int\limits_X f^+ d\mu$ ve $\int\limits_X f^- d\mu$ integrallerinin her ikisi de sonlu ise f fonksiyonu X üzerinde integrallenebilirdir denir. Bu integral

$$\int\limits_X f d\mu = \int\limits_X f^+ d\mu - \int\limits_X f^- d\mu$$

reel sayısıdır. X üzerinde μ ölçüsüne göre integrallenebilen fonksiyonların sınıfı $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}(X, \mathcal{A}, \mu)$ ile gösterilir (**Royden 1968**).

Teorem 2.3.46 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı ve $f \in M(X, \mathcal{A})$ olsun. Bu durumda

$$f \in \mathfrak{L} \Leftrightarrow |f| \in \mathfrak{L}$$

olur ve bunların biri gerçeklendiğinde

$$\left| \int\limits_X f d\mu \right| \leq \int\limits_X |f| d\mu$$

olur (**Royden, 1968**).

Teorem 2.3.47 (Chebyshev Eşitsizliği) $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı ve $f : X \to [0, +\infty]$ fonksiyonu ölçülebilir olsun. $\alpha > 0$ için

$$A_\alpha := \{x \in X : f(x) \geq \alpha\}$$

olmak üzere

$$\mu(A_\alpha) \leq \frac{1}{\alpha} \int\limits_{A_\alpha} f d\mu \leq \frac{1}{\alpha} \int\limits_X f d\mu$$

(**Royden, 1968**).

Teorem 2.3.48 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı, f ile g X üzerinde integrallenebilen reel değerli fonksiyonlar ve α herhangi bir reel sayı olsun. Bu durumda

(i) $\alpha f \in \mathcal{L}$ ve $f + g \in \mathcal{L}$

(ii) $\int\limits_X \alpha f \mathrm{d}\mu = \alpha \int\limits_X f \mathrm{d}\mu$

(iii) $\int\limits_X (f + g) \mathrm{d}\mu = \int\limits_X f \mathrm{d}\mu = \int\limits_X f \mathrm{d}\mu + \int\limits_X g \mathrm{d}\mu$

şartları sağlanır (**Royden, 1968**).

2.4 Lebesgue Uzayları

Fonksiyonel analizde, Banach uzayı ve topolojik vektör uzaylarının önemli bir sınıfını Lebesgue uzayı $L^p(\mathbb{R}^n)$ oluşturur. Harmonik analizin önemli konularından biri olan Lebesgue uzayı, harmonik analizin iç problemlerinin çözülmesinde olduğu gibi kısmi türevli denklemler teorisi ile fizik, istatistik, finans, mühendislik ve ayrıca diğer disiplinlerde de uygulamalara sahiptir.

Tanım 2.4.1 $\mathbb{R}^n$ ile n boyutlu Öklid uzayını gösterelim.
$x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ ve

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}\ , \ x \in \mathbb{R}^n, \ |x| \geq 0$$

olsun. Tüm $\mathbb{R}^n$ de veya $\mathbb{R}^n$ in bir alt kümesinde tanımlı bir fonksiyon $g(x) = g\left(x_1, \ldots, x_n\right)$ ve f, $[0, \infty)$ da hemen her yerde tanımlı tek değişkenli fonksiyon olsun. Eğer n-değişkenli bir g fonksiyonu herhangi bir tek değişkenli f fonksiyonunun yardımıyla $g(x) := f\left(|x|\right)$ şeklinde gösterilebiliyorsa g fonksiyonuna radyal fonksiyon denir. Yani

$$g\left(x_1, \ldots, x_n\right) = f\left(\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}\right)$$

(**Royden, 1968**).

Tanım 2.4.2 $\mathbb{R}^n$ üzerinde $dx = dx_1 \ldots dx_n$ ile Lebesgue ölçüsü ve $\mathbb{R}^n$ uzayı üzerinde f fonksiyonunun (Lebesgue) integrali

$$\int f\left(x\right) dx = \int \cdots \int f\left(x_1, \ldots, x_n\right) dx_1 \ldots dx_n$$

şeklinde gösterilir.

Çok katlı integrali kutupsal koordinatlarda ifade etmek çoğu kez kullanışlı olmaktadır. $r = |x|$ olsun ve $\mathrm{S}^{n-1} = \{x : |x| = 1\}$ ile birim küre gösterilsin.

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f\left(|x|\right) dx$$

integralinin hesabı için

$0 \leq r < \infty$, $0 \leq \theta_1, ..., \theta_{n-2} \leq \pi$, $0 \leq \theta_{n-1} \leq 2\pi$ olmak üzere

$x_1 = r \cos\theta_1$

$x_2 = r \sin\theta_1 \cos\theta_2$

$x_3 = r \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cos\theta_3$

...

$x_n = r \sin\theta_1 \sin\theta_2 ... \sin\theta_{n-1}$

dönüşümü yapılır. Bu dönüşümün Jakobiyeni

$$J\left(r, \theta_1, ..., \theta_{n-1}\right) = r^{n-1} \prod_{j=1}^{n-1} \left(\sin\theta_j\right)^{n-1-j}$$

olarak hesaplanır.

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(|x|)\,dx &= \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\pi \int\limits_0^\pi \dots \int\limits_0^{2\pi} f(r)\,J(r,\theta)\,drd\theta_1 \dots d\theta_{n-1} \\ &= \int\limits_0^\infty r^{n-1} f(r)\,dr \int\limits_0^\pi \int\limits_0^\pi \dots \int\limits_0^{2\pi} \prod_{j=1}^{n-1} (\sin\theta_j)^{n-1-j}\,d\theta_1 \dots d\theta_{n-1} \\ &= \omega_{n-1} \int\limits_0^\infty f(r)\,r^{n-1}dr\end{aligned}$$

elde edilir. Burada ω_{n-1}, birim kürenin yüzey alanıdır. Genel olarak

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)dx &= \int\limits_0^\infty \int\limits_{S^{n-1}} f(r\sin\theta_1, ..., r\sin\theta_1 ... \sin\theta_{n-1})\,r^{n-1}drd\theta_1 ... d\theta_{n-1} \\ &= \int\limits_0^\infty \int\limits_{S^{n-1}} f(r,\theta)\,r^{n-1}drd\sigma\end{aligned}$$

biçiminde yazılır. dx hacim elemanı $dx = r^{n-1}drd\sigma$ biçiminde yazılır. Burada $d\sigma$, S^{n-1} üzerinde dx tarafından belirlenen yüzey ölçüsüdür. Ayrıca,

$$|B(x,r)| = \int\limits_{B(x,r)} dy = \int\limits_{\{x\in\mathbb{R}^n; |x-y|<r\}} dy = \int\limits_{\{z\in\mathbb{R}^n: |z|<r\}} dz = |B(0,r)|$$

ve

$$\begin{aligned}|B(x,r)| = \int\limits_{B(x,r)} dz &= \int\limits_0^r \int\limits_{S^{n-1}} t^{n-1}dtd\sigma \\ &= \int\limits_{S^{n-1}} d\sigma \int\limits_0^r t^{n-1}dt \\ &= |S^{n-1}|\frac{r^n}{n} = \omega_n r^n\end{aligned}$$

(**Sadosky, 1979**).

Tanım 2.4.3 $1 \leq p < \infty$ olmak üzere $\Omega \subset X = \mathbb{R}^n$ bölgesinde tanımlı ve

$$\int\limits_\Omega |f(x)|^p dx < \infty$$

özelligine sahip ölçülebilir $f : \Omega \to \mathbb{R}$ fonksiyonlar sınıfına $L^p(\Omega)$ uzayı veya Ω bölgesinde p. kuvvetten Lebesgue-integrallenebilir fonksiyonlar uzayı denir. $L^p(\Omega)$ uzayı

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \|f\|_{L^p} := \left(\int\limits_\Omega |f(x)|^p dx\right)^{1/p} < \infty$$

seklindeki norm ile tanımlanır. Buradaki $\|f\|_{L^p}$ gösterimine f fonksiyonunun $L^p(\Omega)$-normu denir.

Ω bölgesinde hemen her x için $f(x) \leq M$ olacak şekilde bir M sabiti varsa f fonksiyonuna hemen heryerde sınırlıdır denir. Böyle M sabitlerinin en büyük alt sınırına da $|f|$ nin Ω bölgesindeki esas supremumu(veya esaslı sınırı) denir ve

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} |f(x)| := \text{ess inf}\,\{K : |f(x)| \leq K \quad \text{hemen her } x \in \Omega\}$$

seklinde gösterilir. Ω bölgesindeki hemen heryerde sınırlı f fonksiyonları ile tanımlanan uzay $L^\infty(\Omega)$ seklinde gösterilir. Buna göre bir f fonksiyonunun $L^\infty-$normu

$$\|f\|_{L^\infty} := \operatorname*{ess\,inf}_{x\in\Omega} |f(x)|$$

şeklinde tanımlanır (**Pick vd., 2012**).

Tanım 2.4.4 (Zayıf Lebesgue Uzayı) $1 \leq p < \infty$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ölçülebilir bir fonksiyon ve

$$\|f\|_{WL^p} := \sup_{\lambda>0} \lambda \left(\int\limits_{\{x\in\mathbb{R}^n : |f(x)|>\lambda\}} \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}}$$

olmak üzere zayıf Lebesgue uzayı

$$WL^p(\mathbb{R}^n) := \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : f - \text{ölçülebilir ve } \|f\|_{WL^p} < \infty\}$$

şeklinde tanımlanır (**Grafakos, 2004; Sadosky, 1979**).

Uyarı 2.4.5 $1 \leq p < \infty$ için $L^p(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow WL^p(\mathbb{R}^n)$. Ayrıca

$$\|f\|_{WL^p} \leq \|f\|_{L^p}$$

eşitsizliği sağlanır (**Grafakos, 2004; Sadosky, 1979**).

Sonuç 2.4.6 (Lebesgue Diferansiyelleme Teoremi) Eğer $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ise bu durumda hemen her x için

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int\limits_{B(x,r)} f(y)dy = f(x)$$

(**Pick vd., 2012**).

Teorem 2.4.7 (Hölder eşitsizliği) $p \in (1,\infty)$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ olmak üzere $f \in L^p$ ve $g \in L^{p'}$ olsun. Bu durumda $fg \in L^1$ olur ve

$$\int\limits_{\Omega} |f(x)g(x)|dx \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}} \tag{2.17}$$

eşitsizliği sağlanır (**Pick vd., 2012**).

Teorem 2.4.8 (Minkowski eşitsizliği) $p \in [1, \infty)$ ve $f, g \in L^p$ olsun. Bu durumda $(f+g) \in L^p$ olmak üzere

$$\|f+g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p} \tag{2.18}$$

eşitsizliği sağlanır (**Pick vd., 2012**).

Lebesgue integralinin özellikleri ve Hölder eşitsizliği gözönüne alındığında L^p uzayının $1 \leq p < \infty$ için bir vektör uzayı olduğu görülür. Bununla beraber bir $f \in L^p$ olmak üzere $\|f\|_{L^p}$ normu altında;

$(L1)$ $\|f\|_{L^p} \geq 0$

$(L2)$ $\|f\|_{L^p} = 0 \Rightarrow$ h.h.y $f(x) = 0$

$(L3)$ $\|\alpha f\|_{L^p} = |\alpha| \|f\|_{L^p}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$(L4)$ $\|f+g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}$

şartları sağlandığından $1 \leq p < \infty$ için L^p bir normlu uzaydır.

Teorem 2.4.9 (Young eşitsizliği) $p \in (1, \infty)$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ olsun. $\forall a, b \in \mathbb{R}$ için $a, b > 0$ ve $p' = \frac{p}{p-1}$ olmak üzere

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'} \tag{2.19}$$

eşitsizliği sağlanır (**Pick vd., 2012**).

Tanım 2.4.10 (L^p uzayında yakınsaklık) $f_n, f \in L^p$ olmak üzere $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ nin f fonksiyonuna p. mertebeden yakınsak olması için gerek ve yeter şart $\forall \varepsilon > 0$ için en az bir $n_0 \in \mathbb{N}$ mevcuttur öyle ki her $n \geq n_0$ için $\|f_n - f\|_{L^p} < \varepsilon$ olmasıdır.

Burada

$$\|f_n - f\|_{L^p} := \left(\int\limits_{\Omega} |f_n - f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}, \qquad 1 \leq p < \infty.$$

Buna göre, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ nin f fonksiyonuna L^p de yakınsak olması için gerek ve yeter şart

$$\lim_{n \to \infty} \|f_n - f\|_{L^p} = 0$$

olmasıdır (**Pick vd., 2012**).

Teorem 2.4.11 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ olmak üzere $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$ uzayı

$$\|f\|_{L^p} := \left(\int\limits_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

normu altında tam ve dolaysıyla Banach uzayıdır (**Royden, 1968**).

Teorem 2.4.12 (Fubini) f, $\mathbb{R}^{m+n}$ üzerinde ölçülebilir bir fonksiyon ve

$$I_1 = \int\limits_{\mathbb{R}^{n+m}} |f(x,y)|\, dxdy$$

$$I_2 = \int\limits_{\mathbb{R}^{m}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^{n}} |f(x,y)|\, dx \right) dy$$

$$I_3 = \int\limits_{\mathbb{R}^{n}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^{m}} |f(x,y)|\, dy \right) dx$$

integrallerinden en az biri mevcut ve sonlu olsun. I_2 için bu $\mathbb{R}^n$ üzerinde integrallenebilen bir g fonksiyonu vardır öyle ki $g(y)$ hemen her y için içteki integrale eşittir anlamındadır ve I_3 için de aynısı geçerlidir. Bu durumda

(a) Hemen her $y \in \mathbb{R}^m$, $f(\cdot, y) \in L^1(\mathbb{R}^n)$

(b) Hemen her $x \in \mathbb{R}^n$, $f(x, \cdot) \in L^1(\mathbb{R}^m)$

(c) $\int\limits_{\mathbb{R}^m} f(\cdot, y)\, dy \in L^1(\mathbb{R}^n)$

(d) $\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x, \cdot)\, dx \in L^1(\mathbb{R}^m)$

(e) $I_1 = I_2 = I_3$

şartları elde edilir (**Pick vd., 2012**).

Tanım 2.4.13 (Homojen Fonksiyon) λ ve α iki reel sayı olmak üzere

$$f(\lambda x) = |\lambda|^{\alpha} f(x)$$

oluyorsa f fonksiyonuna α. dereceden homojen fonksiyon denir (**Pick vd., 2012**).

Tanım 2.4.14 (Örtü) Birleşimleri A kümesini kapsayan $\bigcup\limits_i$ kümeler ailesine A kümesinin bir örtüsüdür denir. Bu $\bigcup\limits_i$ kümelerinin her biri açıksa bu halde $\bigcup\limits_i$, A kümesinin açık örtüsüdür denir. Birleşimleri A kümesini kapsayan alt topluluklar ailesine verilen örtünün alt örtüsü ismi verilir. Eğer bu topluluklar ailesi sonlu sayıda kümelerden oluşuyorsa, bu örtüye sonlu alt örtü denir (**Alp ve Musayev, 2000**).

Tanım 2.4.15 (Kompaktlık) X kümesinin her açık örtüsünün sonlu sayıda bir alt örtüsü varsa, X kümesine "kompakttır" denir. Kapalı ve sınırlı her kümenin açık örtüsünün sonlu sayıda bir alt örtüsü vardır. Yani, kapalı ve sınırlı her küme kompakttır (**Alp ve Musayev, 2000**).

Tanım 2.4.16 (Destek) (X,ϱ) bir metrik uzayı ve $f : X \to [0,\infty]$ olsun. $f(x) \neq 0$ şartını sağlayan x noktalarının kapanışına f fonksiyonunun desteği denir ve

$$\operatorname{supp} f = \overline{\{x \in X :\ f(x) \neq 0\}}$$

ile gösterilir. Eğer f fonksiyonunun desteği kompakt bir küme ise bu durumda f kompakt destekli fonksiyon adını alır (**Pick vd., 2012**).

Tanım 2.4.17 $(X,\mathcal{A},\mu)$ metrik ile verilen bir $\sigma-$sonlu ölçü uzayı olsun. Bu durumda bir $s : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun basit olması için gerek ve yeter koşul s fonksiyonunun görüntüsü sonlu bir küme ve desteğinin sonlu ölçülü olmasıdır (**Pick vd., 2012**).

Teorem 2.4.18 Eğer $1 \leq p < \infty$ ise L^p deki basit fonksiyonların kümesi L^p de yoğundur (**Royden, 1968**).

Tanım 2.4.19 (Lokal İntegrallenebilme) f ölçülebilir bir fonksiyon olmak üzere her K kompakt kümesi üzerinde

$$\int\limits_K |f|\, d\mu < \infty$$

ise f fonksiyonuna lokal(veya yerel) integrallenebilir adı verilir ve

$$L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n) := \left\{ f : \int\limits_K |f|\, d\mu \ < \ \infty,\ K \subset \mathbb{R}^n,\ K \text{ kompakt} \right\}$$

şeklinde ifade edilir. Ayrıca,

$$L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n) := \left\{ f : \left(\int\limits_K |f|^p\, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \ < \ \infty,\ K \ \subset \ \mathbb{R}^n,\ K \text{ kompakt} \right\}$$

şeklinde tanımlanır (**Royden, 1968**).

Teorem 2.4.20 $1 \leq p \leq \infty \Rightarrow L_p(\mathbb{R}^n) \subset L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n) \subset L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ (**Royden, 1968**).

Tanım 2.4.21 (Ağırlıklı L_p Uzayı) $1 \leq p \leq \infty$, ω bir ağırlık fonksiyonu olsun. Bu durumda, $L_p(\omega) \equiv L_p(\mathbb{R}^n, w)$ ağırlıklı Lebesgue uzayı

$$\|f\|_{L_{p,\omega}} \equiv \|f\|_{L_{p,\omega(\mathbb{R}^n)}} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p\ \omega(x)dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

normuna sahip bütün bütün ölçülebilir f fonksiyonların uzayı olarak tanımlanır. $p = \infty$ durumunda ise $L_\infty(\omega) \equiv L_\infty(\mathbb{R}^n, \omega)$ de norm

$$\|f\|_{L_{\infty,\omega}} \equiv \|f\|_{L_{\infty,\omega(\mathbb{R}^n)}} = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x)|\ \omega(x)$$

ile tanımlanır (**Royden, 1968**).

Şimdi, $L^p(\Omega),\ 1 < p < \infty$ uzayının $[L^p(\Omega)]^*$ dual uzayını ifade eden tanımı verelim.

Tanım 2.4.22 (Dual Uzayı) $g \in L^{p'}$ olmak üzere $f \in L^p(\Omega)$ için

$$\Phi_g(f) := \int_\Omega f(x)g(x)dx$$

gösterilsin. Bu durumda,

$$\Phi_g \in [L^p(\Omega)]^*$$

ve

$$\|\Phi_g\| = \|g\|_{p'}$$

(**Pick vd., 2012**).

Lemma 2.4.23 Ω, $\mathbb{R}^n$ nin bir boş olmayan sınırlı açık alt kümesi ve g de Ω üzerinde bir ölçülebilir fonksiyon olsun. Kabul edelimki $p > 1$ ve $M > 0$ mevcuttur öyle ki keyfi bir $f \in L^p(\Omega)$ için

$$f \cdot g \in L^1(\Omega)$$

ve

$$\left| \int_\Omega f(x)g(x)dx \right| \leq M\|f\|_p.$$

Bu durumda $g \in L^{p'}(\Omega)$ ve $\|g\|_{p'} \leq M$ (**Pick vd., 2012**).

2.5 Maksimal Operatörü

Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonu ilk olarak Hardy ve Littlewood tarafından bir boyutlu durumda, kompleks analizin uygulamalarına yönelik olarak tanımlanmıştır. Maksimal fonksiyon, analizde pek çok operatörün sınırlılığında çok önemli bir role sahiptir. Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonunun farklı tanımları aşağıdaki gibi verilebilir.

Tanım 2.5.1 $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda Mf Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonu

$$Mf(x) = \sup_{r>0} |B(0,r)|^{-1} \int_{B(0,r)} |f(x-y)|dy$$

şeklinde tanımlanır. Bu fonksiyon $+\infty$ a eşit olabilir **(Grafakos, 2004)**.

Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonu yuvar yerine küp alınarak aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

Tanım 2.5.2 $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ olsun. Eğer Q_r, $[-r,r]^n$ kübü ise $M'f$ merkezli Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonu

$$M'f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{(2r)^n} \int\limits_{Q_r} |f(x-y)|\, dy$$

şeklinde tanımlanır. $n = 1$ iken M ve M' çakışır. Eğer $n > 1$ ise bu durumda

$$c_n M'f(x) \leq Mf(x) \leq C_n M'f(x)$$

olacak şekilde sadece n boyutuna bağlı c_n ve C_n sabitleri vardır. Bu eşitsizlikten dolayı M ve M' operatörleri uygun koşullara göre değiştirilebilir **(Hardy ve Littlewood, 1930)**.

Tanım 2.5.3 $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ olsun. $M''f$ merkezli olmayan Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonu

$$M''f(x) = \sup_{B \ni x} \frac{1}{|B|} \int\limits_{B} |f(y)| dy$$

şeklinde tanımlanır. Burada supremum x i içeren bütün $B \subset \mathbb{R}^n$ yuvarları üzerinden alınmaktadır. M ve M'' noktasal olarak eşdeğerdir.

M maksimal operatörü altlineer ve homojendir. Yani,

$$M(f+g) \leq Mf + Mg \quad \text{ve} \quad M(\lambda f) = \lambda(Mf), \ \ \forall \lambda \geq 0$$

sağlanır **(Stein, 1970; Duoandikoetxea, 2001)**.

Aşağıdaki teorem M Hardy-Littlewood maksimal operatörünün hemen her yerde sonlu, zayıf $(1,1)$ ve $1 < p \leq \infty$ için (p,p) tipinden bir operatör olduğunu ifade etmektedir.

Teorem 2.5.4

(1) $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ve $1 \leq p \leq \infty$ olsun. Bu durumda hemen her $x \in \mathbb{R}^n$ için $Mf(x) < \infty$.

(2) $p = 1$ ise bu durumda $\forall \lambda > 0$ ve $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ için

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : \ Mf(x) > \lambda\}| \leq \frac{C}{\lambda} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$$

olacak şekilde bir $C = C(n) > 0$ sabiti vardır.

(3) $1 < p \leq \infty$ ise $\forall f \in L^p$ için

$$\|Mf\|_{L^p} \leq C \|f\|_{L^p}$$

olacak şekilde bir $C = C(n,p) > 0$ sabiti vardır **(Grafakos, 2004; Hardy ve Littlewood, 1930)**.

2.6 Hilbert Dönüşümü

Hilbert dönüşümü, Riemann tarafından ortaya atılan analitik fonksiyonlar açısından önemli bir problemin 1905 yılında Hilbert tarafından çalışılmasıyla ilk olarak ortaya çıktı **(Khvedelidze, 2001; Hilbert, 1953)** Riemann-Hilbert problemi olarak bilinir hale geldi. Hilbert'in çalışması **(Khvedelidze, 2001; Hilbert, 1953)** çemberin üzerinde tanımlı fonksiyonlar için Hilbert dönüşümü ile ilgiliydi. Ayrık Hilbert dönüşümü ile ilgili daha önceki çalışmaların bazılarını Göttingen'e geri dönüşünde verdi. Bu sonuçlar daha sonra **(Hardy vd., 1952)**, Hermann Weyl tarafından doktora tezinde yayınlanmıştır. Ayrık Hilbert dönüşümü ile ilgili olan Hilbert'in bu sonuçları Schur tarafından geliştirdi ve **(Hardy vd., 1952)** integral durumu için bu sonuçlar genişletildi. Bu sonuçlar L^2 ve l^2 uzayları ile sınırlı kaldı. 1928 yılında ise Marcel Riesz tarafından Hilbert dönüşümünün aynı aralıktaki p için L^p üzerinde bir sınırlı operatör olduğunu, $1 \leq p \leq \infty$ için L^p içinde u için tanımlanabilir ve benzer olabileceği ispatlandı. Hilbert çember dönüşümünün yanı sıra ayrık Hilbert **(Riesz, 1928)** dönüşümü içinde sonuçlar aynıdır. Singüler integrallerin Hilbert dönüşümü **(Calderón ve Zygmund, 1952)** kendi çalışmaları sırasında Antoni Zygmund ve Alberto Calderón için etkileyici bir örnek oldu. Onların araştırmaları, modern harmonik analizde temel bir rol oynamıştır. Hilbert'in bilineer ve trilineer gibi çeşitli genellemeleri bugün Hilbert dönüşümünün hala aktif araştırma alanlarıdır.

f fonksiyonunun Hilbert dönüşümü, $h(x) = 1/(\pi x)$ fonksiyonu ile f fonksiyonunun evrişimi olarak düşünülebilir. Çünkü h yakınsak olmayan evrişim tanımlayan integraller integrallenebilir değildir. Bunun yerine, Hilbert dönüşümü Cauchy esas değeri kullanılarak tanımlanır (burada p.v. ile gösterilir). Açıkça, bir fonksiyonun Hilbert dönüşümü f tarafından şöyle verilir:
$f \in L^p(\mathbb{R}^n),\ 1 \leq p < \infty$ olsun. Bu durumda f fonksiyonunun Hf Hilbert dönüşümü,

$$Hf(x) = p.v.\frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{f(y)}{x-y}\mathrm{d}y = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\pi} \int\limits_{|x-y| \geq \varepsilon} \frac{f(y)}{x-y}\mathrm{d}y$$

şeklinde tanımlanır. Eğer $f \in L^p(\mathbb{R}^n),\ 1 \leq p < \infty$ ise bu durumda f fonksiyonunun Riesz dönüşümü

$$R_j f(x) = p.v.C_n \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{x_j - y_j}{|x-y|^{n+1}} f(y)dy, \quad 1 \leq j \leq n$$

şeklinde tanımlanır. Riesz dönüşümü, Hilbert dönüşümünün bir buyuttan n boyuta genelleştirmesidir. Riesz dönüşümü, ikinci boyutta eliptik denklemlerin çözümlerinin düzgünlüğü çalışmalarında ortaya çıkmaktadır **(Pandey, 1966; Schwartz, 1950; Torchinsky, 1986; Zygmund, 1968)**.

3 BANACH FONKSİYON UZAYLARI

Banach fonksiyon uzayları ölçülebilir fonksiyonların Banach uzaylarıdır. Öyle ki burada Banach fonksiyon normu, uygun bir şekilde tanımlanan ölçüye bağlıdır. Bu da fonksiyonel-analitik ve ölçü-teorik teknikler arasında faydalı bir ilişkiye imkan sağlar. Banach fonksiyon uzayları teorisi Lebesgue, Orlicz ve Morrey uzayları ve onların çeşitli modifikasyonları dahil olmak üzere fonksiyon uzaylarının ölçüleri ile ilgili birçok önemli özelliği içeren bir yapıdır. Lorentz uzayları ve Lorentz uzaylarının çok önemli bir sınıfını ve ayrıca yeniden düzenleme altında değişmez kalan uzayları da kapsamaktadır.

Bu tez boyunca $(\mathcal{R}, \mu)$ ikilisi ile bir σ-sonlu ölçü uzayı gösterilmiştir. Yani,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mu(R_n) < \infty$$

olmak üzere

$$\mathcal{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} R_n$$

olacak şekilde bir $\{R_n\}_{n=1}^{\infty}$ mevcuttur.

Ayrıca tezde kullanılan bazı notasyonlar aşağıdaki gibidir;

- $(\mathcal{R}, \mu)$, σ-sonlu atomik olmayan bir ölçü uzayıdır.
- $\mathcal{M}(\mathcal{R}, \mu)$, $\mathcal{R}$ üzerindeki bütün ölçülebilir reel fonksiyonların kümesidir.
- $\mathcal{M}_0(\mathcal{R}, \mu)$, hemen her yerde sonlu olan $\mathcal{M}(\mathcal{R}, \mu)$ kümesindeki fonksiyonların sınıfıdır.
- $\mathcal{M}_+(\mathcal{R}, \mu)$, negatif olmayan fonksiyonların oluşturduğu $\mathcal{M}_0(\mathcal{R}, \mu)$ sınıfının alt kümesidir.
- $\mathcal{R}$ bir (a, b) aralığı, μ de bir boyutlu Lebesgue ölçüsü olduğunda $\mathcal{M}_+(a, b)$ gösterimi tercih edilmiştir.
- χ_E, $\mathcal{R}$ nin bir ölçülebilir E kümesinin karakteristik fonksiyonudur.

3.1 Banach Fonksiyon Uzayları

Bu kısımda Banach fonksiyon uzaylarının tanımı ve bazı özellikleri verilmiştir.

Uyarı 3.1.1 H.h.y$-\mu$ için herhangi iki fonksiyon tanımlanmış olsun. Doğal vektör uzayı işlemleri $\mathcal{M}_0$ üzerinde ($\mathcal{M}$'nin bütünü üzerinde olmamasına rağmen) iyi tanımlıdır. $\mathcal{M}_0$, sonlu ölçünün kümeleri üzerinde ölçüdeki yakınsamanın topolojisi olarak verildiğinde metriklenebilir topolojik vektör uzayı olur.

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ ve } \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n = \mathcal{R} \text{ için } \mu(S_n) < \infty$$

olacak şekildeki kümelerin parçalanışı S_n olmak üzere bu uzaya karşılık gelen metriklerden biri aşağıdaki gibidir;

$$d(f,g) := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \int\limits_{S_n} \frac{|f(x)g(x)|}{1+|f(x)-g(x)|} d\mu(x).$$

Ayrıca, $(\mathcal{M}, d)$ metrik uzayı tamdır (**Pick vd., 2012**).

Tanım 3.1.2 (Banach Fonksiyon Normu) Eğer $\forall f, g \in \mathcal{M}_+$, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}_+$, $\lambda \geq 0$ ve ölçülebilir $E \subset \mathcal{R}$ kümesi için

(P1) $\varrho(f) = 0 \Leftrightarrow f = 0$ h.h.y$-\mu$; $\varrho(\lambda f) = \lambda \varrho(f)$; $\varrho(f+g) \leq \varrho(f) + \varrho(g)$

(P2) $0 \leq g \leq f$ h.h.y$-\mu \Rightarrow \varrho(g) \leq \varrho(f)$ (latis özelliği)

(P3) $0 \leq f_n \uparrow f$ h.h.y$-\mu \Rightarrow \varrho(f_n) \uparrow \varrho(f)$ (Fatou özelliği)

(P4) $\mu(E) < \infty \Rightarrow \varrho(\chi_E) < \infty$

(P5) $\mu(E) < \infty \Rightarrow \int\limits_E f d\mu \leq C_E \varrho(f)$

özellikleri bir $C_E \in (0, \infty)$ sabiti ve tüm f fonksiyonları için sağlanıyorsa, $\varrho : \mathcal{M}_+ \to [0, \infty]$ fonksiyoneline bir Banach fonksiyon normu denir (**Pick vd., 2012; Megan vd., 2003**).

Tanım 3.1.3 (Banach Fonksiyon Uzayı) ϱ, bir Banach fonksiyon normu olsun. $\mathcal{M}$ kümesindeki $\varrho(|f|) < \infty$ özelliğine sahip fonksiyonların $X = X(\varrho)$ kümesine Banach fonksiyon uzayı denir ve $\forall f \in X$ için

$$\|f\|_X := \varrho(|f|) \tag{3.1}$$

şeklinde tanımlanır (**Pick vd., 2012; Megan vd., 2003**).

Uyarı 3.1.4 $\|f\|_X$ fonksiyoneli, $\forall f \in \mathcal{M}_0$ için tanımlanmış olduğu halde sonsuz olabilir.

$$f \in X,\ X = X(\varrho) \Leftrightarrow \|f\|_X < \infty$$

(**Pick vd., 2012**).

Tanım 3.1.5 (Basit Fonksiyon) Eğer $(\mathcal{R}, \mu)$ ölçü uzayı üzerinde reel değerli bir s fonksiyonu sonlu ölçüye sahip ölçülebilir kümelerinin karakteristik fonksiyonlarının sonlu bir lineer kombinasyonuysa μ-basit fonksiyon olarak adlandırılır. Eğer bir $m \in \mathbb{N}$ mevcutsa, reel sayıların sonlu bir dizisi $\{a_1, \ldots, a_m\}$ ve $\mathcal{R}$ sonlu ölçünün μ-ölçülebilir alt kümelerin parçalanışının sonlu bir dizisi $\{E_1, \ldots, E_m\}$ ise

$$s(x) = \begin{cases} a_j, & x \in E_j,\ j = 1, \ldots, m \\ 0, & x \in \mathcal{R} \backslash \bigcup\limits_{j=1}^{m} E_j. \end{cases}$$

Bütün μ-basit fonksiyonların kümesini S ile gösterilecektir (**Pick vd., 2012**).

Teorem 3.1.6 X, ϱ Banach fonksiyon normu tarafından üretilen bir Banach fonksiyon uzayı olsun. O halde $(X, \|\cdot\|_X)$ bir normlu lineer uzaydır. Ayrıca,

$$S \subset X \hookrightarrow \mathcal{M}_0 \tag{3.2}$$

(**Bennett ve Sharpley, 1988; Pick, 1990**).

İspat. μ bir σ-sonlu ölçü olduğunda lokal integrallenebilir fonksiyonlar h.h.y$-\mu$ sonludur. Dolayısıyla, $X \subset M_0$ olur. $\|\cdot\|_X$ normunun Tanım 3.1.2'deki (P5) özelliğinden, X uzayındaki bütün fonksiyonlar $\mathcal{R}$ üzerinde lokal integrallenebilirdir. Bu şekilde, M_0 bir vektör uzayı olduğunda X uzayı da vektör uzayıdır. Aynı zamanda (P1) özelliğinden de X, bir normlu uzaydır. (P4) özelliğinden, her E kümesi için $\mu(E) < \infty$ olmak üzere $\chi_E \in X$ olur. Sonuç olarak, X uzayının lineerliğinden $S \subset X$ elde edilir.

Şimdi $X \hookrightarrow M_0$ gömmesinin sürekli olduğunu gösterelim. Kabul edelimki X uzayında bir $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ için $f_n \to f$ yakınsaması sağlanıyor olsun. O halde (3.1) denkleminden,

$$\lim_{n\to\infty} \varrho(|f_n - f|) = 0.$$

Verilen $\varepsilon > 0$ için $\mu(E) < \infty$ olacak şekilde en az bir $E \subset \mathcal{R}$ var olsun. (P5) özelliğinden, n boyutundan bağımsız olan C_E sabiti için, $n \to \infty$ iken sıfıra yakınsayan

$$\mu\{x \in E : |f(x) - f_n(x)| > \varepsilon\} \leq \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_E |f - f_n| \mathrm{d}\mu \leq \frac{C_E}{\varepsilon}\varrho(|f - f_n|)$$

eşitsizliği elde edilir. Bundan dolayı, sonlu ölçünün her bir kümesi üzerinde ölçüdeki $f_n \to f$, yani M_0 üzerindeki $f_n \to f$ olur. ■

Lemma 3.1.7 (Banach fonksiyon uzayları için Fatou lemma) X, bir Banach fonksiyon uzayı olsun. Kabul edelimki,

$$f_n \in X, \ \forall\, n \in \mathbb{N} \text{ ve bazı } f \in \mathcal{M}$$

olmak üzere h.h.y$-\mu$ için

$$f_n \to f$$

ve ayrıca

$$\liminf_{n\to\infty} \|f_n\|_X < \infty$$

olsun. O halde $f \in X$ ve

$$\|f\|_X \leq \liminf_{n\to\infty} \|f_n\|_X$$

olur (**Pick vd., 2012**).

İspat. Bir $g_n(x) := \inf\limits_{m\geq n} |f_m(x)|$ ile gösterilsin. O halde

$$\text{h.h.y} - \mu, \ 0 \leq g_n \uparrow |f|.$$

Bu nedenle (P2) ve (P3) özelliklerinden,

$$\begin{aligned}\|f\|_X &= \lim_{n\to\infty} \|g_n\|_X \\ &\le \lim_{n\to\infty} \inf_{m\ge n} \|f_m\|_X \\ &= \liminf_{n\to\infty} \|f_n\|_X < \infty\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Dolayısıyla

$$f \in X$$

ve

$$\|f\|_X \le \liminf_{n\to\infty} \|f_n\|_X.$$

■

Teorem 3.1.8 (Riesz-Fischer) Her Banach fonksiyon uzayı Riesz-Fischer özelliğine sahiptir (**Pick vd., 2012**).

İspat. X bir Banach fonksiyon uzayı olsun. Kabul edelimki, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ ve

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_X < \infty \tag{3.3}$$

olsun. $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$g_n := \sum_{k=1}^{n} |f_k|$$

ve

$$g := \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|, \;\; 0 \le g_n \uparrow g$$

şeklinde gösterelim.

$$\|g_n\|_X \le \sum_{k=1}^{n} \|f_k\|_X \le \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_X, \quad n \in \mathbb{N}$$

olduğunda, (3.3) denklemi ve Lemma 3.1.7'den $g \in X$ olur. (3.2) deki $X \hookrightarrow M_0$ gömmesi ve Uyarı 3.1.1'den görüldüğü üzere h.h.y $-\ \mu$ için $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ serisi noktasal yakınsar ve dolayısıyla bu seri, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ olur.

$$f := \sum_{n=1}^{\infty} f_n$$

şeklinde gösterilmek üzere

$$h_n = \sum_{k=1}^{n} f_k, \quad n \in \mathbb{N}$$

ise o halde h.h.y $-\ \mu$ için $h_n \to f$ olur. Bu nedenle, $\exists m \in \mathbb{N}$ için

$$n \to \infty,\ \text{h.h.y}{-}\mu,\ (h_n - h_m) \to (f - h_m)$$

elde edilir. Ayrıca,

$$\liminf_{n\to\infty} \|h_n - h_m\|_X \leq \liminf_{n\to\infty} \sum_{k=m+1}^{n} \|f_k\|_X = \sum_{k=m+1}^{\infty} \|f_k\|_X$$

eşitsizliği (3.3) denkleminden dolayı $m \to \infty$ olduğunda sıfıra yakınsar. Bu nedenle, Lemma 3.1.7'den $f - h_m \in X$ elde edilir. Ayrıca,

$$f \in X,\ \lim_{m\to\infty} \|f - h_m\|_X = 0$$

olur. Bu da $\forall m \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} \|f\|_X &\leq \|f - h_m\|_X + \|h_m\|_X \\ &\leq \|f - h_m\|_X + \sum_{k=1}^{m} \|f_k\|_X \end{aligned}$$

olmasını gerektirir. $m \to \infty$ alındığında ise

$$\|f\|_X \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_X \tag{3.4}$$

eşitsizliği elde edilir. ∎

Sonuç 3.1.9 Her Banach fonksiyon uzayı tamdır (**Pick vd., 2012**).

İspat. Bu, Teorem 3.1.8 ve Teorem 2.1.9'un yakın bir sonucudur. ∎

Şimdi, Banach fonksiyon uzaylarının temel özelliklerini özetleyen bir uyarı verelim.

Uyarı 3.1.10 X, ϱ Banach fonksiyon normu tarafından üretilen bir Banach fonksiyon uzayı olsun. Kabul edelimki $\forall f \in X$ için $\|f\|_X = \varrho(|f|)$ olsun. Bu durumda $(X, \|\cdot\|_X)$, bir Banach uzayıdır. $\forall n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $f, g, f_n \in \mathcal{M}$ için ve bütün $E \subset \mathcal{R}$ ölçülebilir alt kümeleri için aşağıdaki özellikler sağlanır;

(i) (Latis özelliği) h.h.y$-\mu$ için

$$|g| \leq |f|$$

ve

$$f \in X \Rightarrow g \in X$$

ve

$$\|g\|_X \leq \|f\|_X.$$

(ii) Kabul edelimki $f \in \mathcal{M}$ olsun.

$$f \in X \Longleftrightarrow |f| \in X$$

ve

$$\|f\|_X = \|\ |f|\ \|_X.$$

(iii) (Fatou özelliği) Kabul edelimki $f_n \in X,\ f_n \geq 0,\ n \in \mathbb{N}$ ve h.h.y$-\mu$ için $f_n \uparrow f$ olsun. O halde,

$$f \in X \Rightarrow \|f_n\|_X \uparrow \|f\|_X$$

ve

$$f \notin X \Rightarrow \|f_n\| \uparrow \infty.$$

(iv) (Fatou lemma) Kabul edelimki $f_n \in X,\ n \in \mathbb{N},\ f_n \overset{h.h.y}{\longrightarrow} f$ ve $\liminf_{n\to\infty} \|f_n\|_X < \infty$ olsun. O halde,

$$f \in X$$

ve

$$\|f\|_X \leq \liminf_{n\to\infty} \|f_n\|_X.$$

(v) X uzayı bütün basit fonksiyonların S kümesini içerir.

(vi) Sonlu ölçüye sahip her bir E kümesine karşılık gelen yalnızca E kümesine bağlı pozitif bir C_E sabiti vardır öyle ki her $f \in X$ için

$$\int_E |f| d\mu \leq C_E \|f\|_X.$$

(vii) $X,\ f_n \to f \Rightarrow$ sonlu ölçüye sahip bütün kümeler üzerinde $f_n \overset{\mu}{\to} f$. Ayrıca, hemen her yerde f fonksiyonuna noktasal yakınsak olan bir $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ alt dizisi vardır (**Pick vd., 2012**).

Teorem 3.1.11 X ve Y aynı ölçü uzayı üzerinde iki Banach fonksiyon uzayı ve $X \subset Y$ olsun. O halde $X \hookrightarrow Y$ olur (**Pick 1990; Pick vd., 2012**).

İspat. Kabul edelimki $X \hookrightarrow$ Y gömmesi sağlanıyor olmasın. O halde X üzerinde $f_n \geq 0$ için fonksiyonların bir $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ vardır öyle ki

$$\|f_n\|_X \leq 1, \quad \|f_n\|_Y > n^3, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Teorem 3.1.8'den, $\sum \dfrac{f_n}{n^2}$ serisi X deki bir $f \in X$ fonksiyonuna yakınsar. $X \subset$ Y hipotezinden dolayı $f \in$ Y dir. Ayrıca, $0 \leq n^{-2} f_n \leq f$ ve $n \in \mathbb{N}$ için $\|f\|_Y \geq n^{-2}\|f_n\|_Y > n$ olduğundan, $f \in$ Y ile bir çelişki elde edilerek ispat tamamlanmış olur. ■

Örnek 3.1.12

(i) $1 \leq p \leq \infty$ olsun. $L^p(\Omega)$ Lebesgue uzayı bir Banach fonksiyon uzayıdır.

(ii) $1 \leq p \leq \infty$ ve ω da Ω üzerinde bir ağırlık olsun. Ağırlıklı Lebesgue uzayı $L^p(\Omega, \omega)$ bir Banach fonksiyon uzayıdır.

(iii) Φ, Young fonksiyonu olsun. Orlicz uzayı $L^{\Phi}(\Omega)$ bir Banach fonksiyon uzayıdır.

(iv) $\lambda \geq 0$ ve $p \in (1, \infty)$ olsun. Morrey uzayı $L_M^{p;\lambda}(\Omega)$ bir Banach fonksiyon uzayıdır.

(v) $\lambda \geq 0$ ve $p \in (1, \infty)$ olsun. Campanato uzayı $L_C^{p;\lambda}(\Omega)$ bir Banach fonksiyon uzayı değildir.

(**Pick vd., 2012**)

3.2 İlişik Uzay

Bu bölümde, $1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere L^p ve $L^{p'}$ Lebesgue uzayları arasındaki duallik model alınarak verilen bir Banach fonksiyon uzayının ilişik uzayı araştırılmıştır.

Tanım 3.2.1 ϱ , bir Banach fonksiyon normu olsun. $\mathcal{M}^+$ üzerinde

$$\varrho'(g) := \sup \left\{ \int_{\mathcal{R}} fg d\mu : f \in \mathcal{M}^+, \varrho(f) \leq 1 \right\}, \qquad g \in \mathcal{M}^+ \tag{3.5}$$

ile tanımlanan ϱ' fonksiyoneline ϱ normunun ilişik normu denir (**Pick vd., 2012**).

Teorem 3.2.2 ϱ bir Banach fonksiyon normu olsun. ϱ' da bir Banach fonksiyon normudur (**Pick vd., 2012**).

İspat. Kabul edelimki $\varrho(f) \leq 1$ olsun. O halde (3.2) denkleminden h.h.y$-\mu$ için $f(x) < \infty$ eşitsizliği sağlanır. Eğer h.h.y$-\mu$ için $g = 0$ ise

$$\int_{\mathcal{R}} fg \mathrm{d}\mu = 0.$$

Dolayısıyla, (3.5) denkleminden, $\varrho'(g) = 0$ olur.

Eğer $\varrho'(g) = 0$ ise $\varrho(f) \leq 1$ olacak şekilde bütün $f \in M^+$ için $\int_{\mathcal{R}} fg \mathrm{d}\mu = 0$. Eğer $0 < \mu(E) < \infty$ aralığıyla verilen $E \subset R$ bir μ-ölçülebilir küme ise bu durumda ϱ normunun (Pl) ve (P4) özelliklerinden $0 < \varrho(\chi_E) < \infty$. Bu da $f := \chi_E / \varrho(\chi_E)$ fonksiyonu için $\varrho(f) = 1$ eşitliğini sağlar. Dolayısıyla,

$$\varrho(\chi_E)^{-1} \int_E g \mathrm{d}\mu = \int_{\mathcal{R}} fg \mathrm{d}\mu = 0.$$

Bu şekilde, E üzerinde h.h.y$-\mu$ için $g = 0$ olur. Çünkü E keyfi olarak seçilir ve h.h.y$-\mu$ için $g = 0$ olduğu elde edilir. ϱ' için pozitif homojenlik ve üçgen eşitsizliği kolayca doğrulanabilir ve buda (Pl) özelliğini gösterir. Sonra yine, (P2) özelliği de basit bir şekilde ϱ' tanımından doğrulanır.

Şimdi (P3)'ü gösterelim. Kabul edelimki $\{g_n\}_{n=1}^{\infty} \subset M$ ve $g \in M$ ve h.h.y$-\mu$ için $0 \leq g_n \uparrow g$ olsun. ϱ' normunun (P2) latis özelliğine sahip olduğu biliniyor. Buradan,

$$\forall m, n \in \mathbb{N},\ m \leq n,\ \varrho'(g_m) \leq \varrho'(g_n) \leq \varrho'(g).$$

Genellenirse $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\varrho(g_n) < \infty$ olduğu olduğu kabul edilebilir. $\varepsilon < \varrho'(g_n)$ eşitsizliğini sağlayan herhangi bir ε sayısı var olsun. (3.5) denkleminden, M^+ üzerinde $\varrho(f) \leq 1$ ile verilen bir f fonksiyonu vardır öyle ki $\int fg\mathrm{d}\mu > \varepsilon$. Şimdi h.h.y$-\mu$ için $0 \leq fg_n \uparrow fg$ yani monoton yakınsaklık Teoremi 2.3.18'den $\int fg_n \uparrow \int fg$ şartını sağlar. Bu nedenle en az bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki tüm $n \geq n_0$ için $\int fg_n > \varepsilon$ olur. Bu şekilde, (3.5) denkleminden tüm $n \geq n_0$ sayıları için $\varrho'(g_n) > \varepsilon$ eşitsizliği elde edilir. Sonuç olarak, $\varrho'(g_n) \uparrow \varrho'(g)$ elde edilir yani ϱ' için (P3) özelliğini sağlar.

ϱ' için (P4) özelliğini doğrulamak amacıyla, ϱ için verilen (P5) özelliği kullanılır ve tersi de doğrudur. $E \subset R$ kümesi $\mu(E) < \infty$ şartını sağlasın. Bu durumda, ϱ için verilen (P5) özelliğinden,

$$\int_{\mathcal{R}} \chi_E f\mathrm{d}\mu \leq C_E \varrho(f), \quad (f \in M^+)$$

eşitsizliğini sağlayan bir $C_E < \infty$ sabiti vardır. (3.5) denklemiyle birlikte bu ϱ' için verilen (P4) şartını sağlayan $\varrho'(\chi_E) \leq C_E < \infty$ eşitsizliğini verir.

Son olarak, $\mu(E) < \infty$ olacak şekilde $E \subset R$ olsun. Eğer $\mu(E) = 0$ ise bu durumda $\int_E f\mathrm{d}\mu = 0$. Bu da (P5) özelliği doğrudan geçerli kılar. $\mu(E) > 0$ olduğunda ϱ için verilen (P4) özelliğinden $\varrho(\chi_E) < \infty$ ve ϱ için verilen (Pl) özelliğinden de $\varrho(\chi_E) > 0$ eşitsizliği elde edilir. Burada, $C'_E := \varrho(\chi_E)$ ve $f := \dfrac{\chi_E}{\varrho(\chi_E)}$ şeklinde gösterilirler. Bu durumda, herhangi bir $g \in M^+$ için $\varrho(f) = 1$ olduğunda ϱ' için verilen (P5) özelliğini sağlayan

$$\int_E g\mathrm{d}\mu = C'_E \int_R fg\mathrm{d}\mu \leq C'_E \varrho'(g)$$

eşitsizliği (3.5) denkleminden elde edilir. ■

Tanım 3.2.3 ϱ bir Banach fonksiyon normu ve X de ϱ tarafından üretilen bir Banach fonksiyon uzayı olsun. ϱ', ϱ normunun ilişik normu ve X' de ϱ' tarafından üretilen Banach fonksiyon uzayı olsun. O halde, X' de X uzayının ilişik uzayıdır denir (**Pick vd., 2012**).

Uyarı 3.2.4 X bir Banach fonksiyon uzayı ve X' de onun ilişik uzayı olsun. Bu durumda $\forall g \in \mathcal{M}$ için

$$\|g\|_{X'} = \sup \left\{ \int\limits_{\mathcal{R}} |fg| d\mu : \; f \in X, \; \|f\|_X \leq 1 \right\} \tag{3.6}$$

(**Pick vd., 2012**).

Teorem 3.2.5 (Hölder eşitsizliği) X bir Banach fonksiyon uzayı ve X' de onun ilişik uzayı olsun. Eğer $f \in X$ ve $g \in X'$ ise $\int\limits_{\mathcal{R}} fg d\mu < \infty$ ve ayrıca,

$$\int\limits_{\mathcal{R}} |fg| d\mu \leq \|f\|_X \|g\|_{X'} \tag{3.7}$$

(**Pick vd., 2012**).

İspat. Kabul edelimki $\|f\|_X = 0$ olsun. O halde, $\mathcal{R}$ üzerinde h.h.y$-\mu$ için $f = 0$ olur. Buradan, (3.7) denkleminin her iki tarafı da sıfırdır. $\|f\|_X > 0$ olduğunda

$$\left\| \frac{f}{\|f\|_X} \right\|_X = 1.$$

Böylece, X' tanımı yardımıyla (6.2.2) denkleminden

$$\int\limits_{\mathcal{R}} \left| \left(\frac{f}{\|f\|_X} \right) g \right| \mathrm{d}\mu \leq \|g\|_{X'}$$

elde edilir. En son işlemin her iki tarafının $\|f\|_X$ fonksiyoneli ile çarpımından (6.2.3) denklemi elde edilir. ■

Teorem 3.2.6 (Landau Rezonans Teoremi) X bir Banach fonksiyon uzayı olsun. Ölçülebilir bir g fonksiyonunun X' ilişik uzayına ait olması için gerek ve yeter şart her $f \in X$ için fg çarpımının integrallenebilir olmasıdır (**Pick vd., 2012**).

İspat. İspatın ($\Rightarrow$) kısmı Teorem 3.2.5'den gelir. ($\Leftarrow$) kısmında ise $\|g\|_{X'} = \infty$ olduğu ama X üzerindeki her f fonksiyonu için fg çarpımının da integrallenebilir olduğu kabul edilir. (3.5) denkleminden,

$$\|f_n\|_X \leq 1, \int\limits_{\mathcal{R}} |f_n g| \mathrm{d}\mu > n^3, \quad n \in \mathbb{N}$$

denklemini sağlayan negatif olmayan f_n fonksiyonları vardır. Dolayısıyla Teorem 3.1.8'den $f = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} f_n \in X$ olur. Ayrıca,

$$\int\limits_{\mathcal{R}} |fg| \mathrm{d}\mu > n^{-2} \int\limits_{\mathcal{R}} |f_n g| \mathrm{d}\mu > n, \quad n \in \mathbb{N}$$

eşitsizliği bir çelişkidir. İspat tamamlanmıştır. ■

X bir Banach fonksiyon uzayı ve X' de onun ilişik uzayı olsun. Bu durumda X uzayının $(X')'$ ilişik uzayına ikinci ilişik uzay denir ve X'' ile gösterilir.

Teorem 3.2.7 (Lorentz-Luxemburg) X bir Banach fonksiyon uzayı olsun. O halde X, ikinci ilişik uzayı X'' ile

$$f \in X \quad \Leftrightarrow \quad f \in X''$$

anlamında çakışır ve

$$\|f\|_X = \|f\|_{X''}, \quad f \in M \tag{3.8}$$

(**Pick vd., 2012**).

İspat. Eğer $f \in X$ ise bu durumda (3.7) Hölder eşitsizliğinden

$$\forall g \in X', \ fg \in L^1.$$

Teorem 3.2.6'dan (X yerine X' kullanılırsa) $f \in X''$ elde edilir. Bu şekilde

$$X \subset X''$$

alınır. (3.6) ve (3.7) denklemlerinden de

$$\|f\|_{X''} = \sup \left\{ \int\limits_{\mathcal{R}} |fg| \mathrm{d}\mu : \|g\|_{X'} \leq 1 \right\} \leq \|f\|_X$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan, ispatı tamamlamak için sadece

$$X'' \subset X$$

ve

$$\|f\|_X \leq \|f\|_{X''}, \quad f \in X'' \tag{3.9}$$

olduğunu göstermemiz gerekir. Aksine, $f \in X''$ ve $n \in \mathbb{N}$ olsun. kümelerin dizisi $\{R_n\}_{n=1}^{\infty}$ olduğunda

$$f_n(x) := \min(|f(x)|, n)\chi_{R_n}(x), \quad n \in \mathbb{N} \tag{3.10}$$

gösterimi kullanılır. Şimdi,

$$0 \leq f_n \leq n\chi_{R_n}$$

olsun. Böylece Uyarı 3.1.10'daki (i) ve (v) özelliklerinden, $f_n \in X$ ve de $f_n \in X''$ olur. Ayrıca, X ve X'' uzaylarının her ikisi de Fatou özelliğine sahiptir ve

$$0 \leq f_n \uparrow |f|.$$

Dolayısıyla, (3.9) denkleminin sağlaması için

$$\|f_n\|_X \leq \|f_n\|_{X''}, \quad n \in \mathbb{N} \tag{3.11}$$

olduğu gösterilmelidir. Buradan itibaren f ve n ifadeleri birer sabit olarak kabul edilir. Genellersek, $\|f_n\|_X > 0$ olduğu kabul edilebilir. Ayrıca,

$$\|g\|_{M_n} := \int\limits_{R_n} |g(x)| \mathrm{d}\mu(x)$$

normuyla verilen

$$M_n := \{f \in M : \ \mathrm{supp} f \subset R_n\}$$

şeklinde tanımlı uzaya bir Banach uzayı denir. S_X, X üzerindeki kapalı birim yuvar olmak üzere

$$U := S_X \cap M_n$$

gösterimiyle verilen U, M_n uzayının konveks alt kümesidir. Eğer

$$\{h_k\}_{k=1}^{\infty} \subset U$$

ve

$$h_k \to h$$

şartları M_n üzerinde sağlanıyorsa, o halde bir $\{h_{k_j}\}_{j=1}^{\infty}$ alt dizisi mevcuttur öyle ki $\mathcal{R}$ üzerinde h.h.y$-\mu$ için

$$h_{k_j} \to h.$$

$\forall j \in \mathbb{N}$ olacak şekilde $h_{k_j} \in S_X$ oduğunda, Fatou lemmasından (Uyarı 3.1.10 (iv)) dolayı $h \in S_X$. Bu nedenle $h \in U$ da yazılabilir, buradaki U, M_n uzayının kapalı bir alt kümesini gösterir.

Şimdi $\lambda > 1$ olsun. O halde

$$g := \lambda \frac{f_n}{\|f_n\|_X} \in (M_n \backslash U). \tag{3.12}$$

Buradan, Hahn-Banach teoremi yardımıyla g ve U kümesini ayıran kapalı bir hiper-düzlem vardır. Bir başka deyişle, $\mathcal{R}$ üzerinde supp $\varphi \subset R_n$ ve bazı $\gamma \in \mathbb{R}$ ile verilen sıfır olmayan bir $\varphi \in L^{\infty}$ fonksiyonu vardır öyle ki U üzerindeki her h için

$$\int\limits_{R_n} \phi h \mathrm{d}\mu < \gamma < \int\limits_{R_n} \phi g \mathrm{d}\mu. \tag{3.13}$$

$|\psi| = 1$ olduğunda kutupsal formdaki φ yerine $\varphi = |\varphi|\psi$ yazılır, ve $\psi|h| \in U$ olması için gerek ve yeter şart $h \in U$ olmasıdır. Buradan

$$\sup_{h \in U} \int\limits_{R_n} |\phi h| \mathrm{d}\mu \leq \gamma < \int\limits_{R_n} \phi g \mathrm{d}\mu \leq \int\limits_{R_n} |\phi g| \mathrm{d}\mu \tag{3.14}$$

eşitsizliği elde edilir. $\forall h \in S$ için

$$h(x) = \lim h_k(x) := \min_{k \to \infty} (h(x), k) \chi_{R_n}(x), \quad x \in R_n.$$

Buradan

$$h_k \in M_n$$

olduğu açıkça görülür ve bu nedenle $\forall k \in \mathbb{N}$ için

$$h_k \in U.$$

Bir $h \in S$ fonksiyonuna $\{h_k\}_{k=1}^{\infty} \subset U$ dizisiyle yakınsanabilir olduğu açıkça görülür. $U \subset S$ olduğunda, monoton yakınsaklık teoreminden (Teorem 2.3.18)

$$\sup_{h\in U} \int\limits_{R_n} |\varphi h| \mathrm{d}\mu = \sup_{h\in S} \int\limits_{R_n} |\varphi h| \mathrm{d}\mu$$

olduğu elde edilir. Böylece, X' uzayının tanımı ve (3.13) denkleminden

$$\|\varphi\|_{X'} = \sup_{h\in S} \int\limits_{R_n} |\varphi h| \mathrm{d}\mu \leq \gamma < \frac{\lambda}{\|f_n\|_X} \int\limits_{R_n} |\varphi f_n| \mathrm{d}\mu$$

eşitsizliği (Burada supp $\varphi \subset R_n$) elde edilir. (3.7) Hölder eşitsizliği ile birlikte bu, X' ve X'' için uygulanır ve

$$\|f_n\|_X < \lambda \int\limits_{\mathcal{R}} \left| f_n \frac{\phi}{\|\phi\|_{X'}} \right| \mathrm{d}\mu \leq \lambda \|f_n\|_{X''}$$

anlamına gelir. $\lambda \to 1$ olması durumunda, (3.11) denklemi elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. ■

X bir Banach fonksiyon uzayı olarak verildiğinde, bu uzaya karşılık gelen X' ilişik uzayı ve X^* dual uzaylarının karşılaştırılması oldukça ilginçtir. Tanımlardan açıktır ki her zaman $X' \subset X^*$ sağlanır. Öte yandan, Teorem 3.2.7'den dolayı tersinin (örneğin $X = L^{\infty}$) genellikle doğru olmadığı aşikardır. Aşağıdaki lemma X' ile X^* arasındaki ilişkilerin bu çalışmadaki ilk adımıdır.

Lemma 3.2.8 X, bir Banach fonksiyon uzayı ve X' de onun ilişik uzayı olsun. Bu durumda

$$\|g\|_{X'} = \sup \left\{ \left| \int\limits_{\mathcal{R}} fg \mathrm{d}\mu \right| \ : \ f \in X, \ \|f\|_X \leq 1 \right\}, \quad g \in \mathcal{M} \tag{3.15}$$

(**Pick vd., 2012**).

İspat. Teorem 3.2.5'dan,

$$\forall f \in X, \ \|f\|_X \leq 1$$

eşitsizliği elde edilir ve her $g \in X'$ için

$$\begin{aligned} \left| \int\limits_{\mathcal{R}} fg \mathrm{d}\mu \right| &\leq \int\limits_{\mathcal{R}} |fg| \, \mathrm{d}\mu \\ &\leq \|f\|_X \|g\|_{X'} \\ &\leq \|g\|_{X'}. \end{aligned}$$

Bu da doğrudan

$$\sup\left\{\left|\int\limits_{\mathcal{R}} fg\mathrm{d}\mu\right| : f \in X, \|f\|_X \leq 1\right\} \leq \|g\|_{X'}$$

eşitsizliğini sağlar. Ters eşitsizliği ispat etmek için, X üzerindeki birim yuvar S_X ile gösterilir. Verilen $g \in M$ için

$$E := \{x \in \mathcal{R},\ g(x) \neq 0\}$$

gösterimi kullanılır ve $|\psi| = 1$ durumunda polar biçimdeki g fonksiyonu

$$g(x) := |g(x)|\psi(x), \quad x \in E$$

şeklinde yazılır. Ayrıca, $f \in S_X$ olsun.

$$h(x) := |f(x)|\psi(x)\chi_E(x), \quad x \in \mathcal{R}$$

gösterimi kullanılmak üzere

$$|h(x)| \leq |f(x)|, \quad x \in \mathcal{R}.$$

Dolayısıyla, X uzayının latis özelliğinden $h \in S_X$. Genelde,

$$\int\limits_{\mathcal{R}} |fg|\mathrm{d}\mu = \int\limits_{E} |fg|\mathrm{d}\mu = \int\limits_{E} |f|\phi g\mathrm{d}\mu.$$

Buradan,

$$\int\limits_{\mathcal{R}} |fg|\mathrm{d}\mu = \int\limits_{\mathcal{R}} hg\mathrm{d}\mu \leq \left|\int\limits_{\mathcal{R}} hg\mathrm{d}\mu\right| \leq \sup_{f\in S_X}\left|\int\limits_{\mathcal{R}} fg\mathrm{d}\mu\right|.$$

Bütün $f \in S_X$ fonksiyonları üzerinden supremuma soldaki geçişle ve (3.6) denkleminin kullanılmasıyla

$$\|g\|_{X'} \leq \sup\left\{\left|\int\limits_{\mathcal{R}} fg\mathrm{d}\mu\right| : f \in X, \|f\|_X \leq 1\right\}, g \in M$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. ■

Uyarı 3.2.9 X, bir Banach fonksiyon uzayı ve X' de bu uzayın ilişik uzayı olsun. $g \in \mathcal{M}$ için $\|g\|_{X'}$ normu

$$\|g\|_{X'} = \sup_{f\not\equiv 0}\frac{\left|\int\limits_{\mathcal{R}} fg\mathrm{d}\mu\right|}{\|f\|_X} \tag{3.16}$$

şeklinde de ifade edilebilir (**Pick vd., 2012**).

Önerme 3.2.10 X ve Y iki Banach fonksiyon uzayı olsun. O halde

$$X \hookrightarrow Y \Leftrightarrow Y' \hookrightarrow X'.$$

Ayrıca, gömme sabitleri çakışır (**Pick, 1990; Pick vd., 2012**).

İspat. (3.16) denkleminden,

$$\begin{aligned} \|\mathrm{I}\|_{X\hookrightarrow Y} &= \sup_{f\neq 0}\frac{\|f\|_Y}{\|f\|_X} = \sup_{f\neq 0}\sup_{g\neq 0}\frac{\left|\int_{\mathcal{R}} fg\mathrm{d}\mu\right|}{\|f\|_X\|g\|_{Y'}} = \sup_{g\neq 0}\sup_{f\neq 0}\frac{\left|\int_{\mathcal{R}} fg\mathrm{d}\mu\right|}{\|f\|_X\|g\|_{Y'}} \\ &= \sup_{g\neq 0}\frac{\|g\|_{X'}}{\|g\|_{Y'}} = \|\mathrm{I}\|_{Y'\hookrightarrow X'} \end{aligned}$$

elde edilir ve buradan iddianın doğru olduğu görülür. Böylece ispat tamamlanır. ∎

Tanım 3.2.11 X bir Banach fonksiyon uzayı ve $f \in X$ olsun. Eğer h.h.y$-\mu$ için

$$E_n \to \emptyset$$

şartını sağlayan her $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ için

$$\|f\chi_{E_n}\|_X \to 0$$

ise f fonksiyonu X üzerinde bir mutlak(veya tamamıyla) sürekli norma sahiptir denir.

$$X_a := \{f \in X : f \text{ fonksiyonu } X \text{ üzerinde mutlak sürekli bir norma sahiptir}\}$$

şeklinde gösterilir. Eğer $X_a = X$ oluyorsa o halde X uzayının bir mutlak(veya tamamıyla) sürekli norma sahip olduğu söylenir (**Pick vd., 2012**).

Önerme 3.2.12 X bir Banach fonksiyon uzayı ve $f \in X$ olsun. O halde f fonksiyonu bir mutlak(veya tamamıyla) sürekli norma sahip olması için gerek ve yeter şart h.h.y$-\mu$ için $E_n \downarrow \emptyset$ şartını sağlayan her $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ için

$$\|f\chi_{E_n}\|_X \downarrow 0$$

olmasıdır (**Pick vd., 2012**).

Örnek 3.2.13

(i) $X = L^p, p \in [1,\infty)$ olsun. Bu durumda $X = X_a$ olur ki bu, L^p deki her fonksiyon kesinlikle bir sürekli norma sahiptir demektir.

(ii) $X = L^\infty$ olsun ve (R,μ), atomik olmayan ölçü uzayı olsun. Bu durumda

$$(L^\infty(R,\mu))_a = \{0\}$$

olur ki bu, bu uzayda yalnızca aynı şekilde sıfıra eşit olan fonksiyon kesinlikle bir sürekli norma sahiptir demektir.

(iii) $\mathbb{N}$ üzerinde aritmetik ölçünün m olduğu yerde $(R, \mu) = (\mathbb{N}, m)$ olsun ve $X = \ell^\infty$ olsun. Bu durumda $X_a = c_0$.

(iv) Φ Young fonksiyonu ve L^Φ de Orlicz uzayına karşılık olsun. Bu durumda

$$L_a^\Phi = E^\Phi.$$

(**Köthe, 1969; Pick vd., 2012; Rana, 2002**).

Teorem 3.2.14 X bir Banach fonksiyon uzayı ve $f \in X$ olsun. Bu durumda $f \in X_a$ olması için gerek ve yeter şart $f_n \leq |f_n|$ eşitsizliğini sağlayan her $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ dizisi ve $f_n \downarrow 0$ için $\|f_n\| \downarrow 0$ olmasıdır (**Pick vd., 2012**).

Teorem 3.2.15 X, bir Banach fonksiyon uzayı ve $f \in X$ olsun. Bu durumda $f \in X_a$ olması için gerek ve yeter şart her $\{f_n\}_{n=1}^\infty$, $g \in X$ ve h.h.y$-\mu$ için $f_n \to g$ olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - g\| = 0$$

olmasıdır (**Pick vd., 2012**).

İspat. $(\Leftarrow)$ kısmının ispatı aşikardır (sadece $f_n = f\chi_{E_n}$ ve $g \equiv 0$ alınır). $(\Rightarrow)$ kısmı için kabul edelimki $f \in X_a$ olsun ve $\mathcal{R}$ üzerinde h.h.y$-\mu$ için

$$|f| \geq |f_n| \quad \text{ve} \quad f_n \to g$$

şartlarını sağlayan bir $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ olsun.

$$h_n(x) := \sup_{m\geq n} |f_m(x) - g(x)|, \quad n \in \mathbb{N}$$

ifadesi verilsin. Bu durumda, h.h.y$-\mu$ için

$$2|f| \geq h_n \searrow 0.$$

Ayrıca, Teorem 3.2.14'den

$$\|h_n\|_X \searrow 0$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$\|f_n - g\|_X \leq \|h_n\|_X$$

ve buradan istenildiği üzere

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - g\|_X = 0.$$

Böylece ispat tamamlanır. ■

Teorem 3.2.16 X, bir Banach fonksiyon uzayı olsun. Bu durumda X_a uzayı, X üzerinde bir idealdir (**Pick vd., 2012**).

İspat. $X_a \subset X$ olduğu açıktır. Ayrıca, eğer $f \in X_a$ ve h.h.y$-\mu$ için $g \in M$ olmak üzere $|g| \leq |f|$ ise o halde $g \in X_a$ olduğu da aşikardır. Bütünüyle açık olmayan iddianın yeterlilik kısmı, X üzerinde X_a nın kapalılığıdır. Kabul edelimki $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, X_a üzerindeki fonksiyonların bir dizisi ve

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_X = 0$$

olsun. Bu durumda $\varepsilon > 0$ için $n_0 \in \mathbb{N}$ mevcuttur öyle ki her $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $n \geq n_0$ için

$$\|f - f_n\|_X < \frac{\varepsilon}{2}$$

eşitsizliği elde edilir. $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\mathcal{R}$ nin μ-ölçülebilir alt kümelerinin bir dizisi olsun öyle ki h.h.y$-\mu$ için $k \to \infty$ olduğunda $E_k \searrow \emptyset$ olur. Kabul edelim $n \geq n_0$ olsun. $f_n \in X_a$ için $\exists k_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki $\forall k \in \mathbb{N}$ olmak üzere $k \geq k_0$ için

$$\|f_n \chi_{E_k}\|_X < \frac{\varepsilon}{2}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece, $\forall k \geq k_0$ için

$$\begin{aligned}\|f\chi_{E_k}\|_X &\leq \|(f - f_n)\chi_{E_k}\|_x + \|f_n\chi_{E_k}\|_X \\ &\leq \|f - f_n\|_X + \|f_n\chi_{E_k}\|_X \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla, $\lim_{k\to\infty} \|f\chi_{E_k}\|_X = 0$ olduğu açıktır ve buradan $f \in X_a$ olur. Başka bir deyişle, X_a, X uzayının kapalı bir alt uzayıdır. ■

Sonuç 3.2.17 X bir Banach fonksiyon uzayı ve $f \in X_a$ olsun. Kabul edelimki $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ h.h.y$-\mu$ için

$$0 \leq f_n \uparrow f$$

şartını sağlayan X üzerindeki fonksiyonların bir dizisi olsun. Bu durumda

$$\|f - f_n\|_X \to 0.$$

(**Pick vd., 2012**).

Tanım 3.2.18 X bir Banach fonksiyon uzayı olsun ve basit fonksiyonların uzayı da S ile gösterilsin. S uzayının X uzayındaki kapanışı X_b ile gösterilir.

Teorem 3.2.19 X, bir Banach fonksiyon uzayı olsun. O halde X uzayının norm topolojisi anlamında kapanışı

$$X_b = \{\overline{f \in X : f \text{ sınırlı ve } \mu(\text{supp} f) < \infty}\}$$

(**Pick vd., 2012**).

İspat. Sadece "$\supset$" içermesini ispat etmek yeterlidir. f, $\mathcal{R}$ üzerinde sınırlı bir fonksiyon ve $\mu(\text{supp } f) < \infty$ olsun. Önce kabul edelimki $f \geq 0$ olsun. $\mathcal{R}$ üzerindeki basit fonksiyonların bir dizisi $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ olmak üzere

$$\text{supp} f_n = \text{supp} f$$

ve

$$f_n \xrightarrow{d.y} f.$$

Bu durumda

$$\begin{aligned}\|f_n - f\|_X &= \|(f_n - f)\chi_{\text{supp} f}\|_X \\ &\leq \|f_n - f\|_{L^\infty} \|\chi_{\text{supp} f}\|_X.\end{aligned}$$

$\mu(\text{supp } f) < \infty$ koşulu ve X uzayının (P4) özelliğinden

$$\|\chi_{\text{supp} f}\|_X < \infty.$$

Buradan, istenildiği üzere

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_X = 0.$$

Böylece ispat tamamlanır. ■

Teorem 3.2.20 X, bir Banach fonksiyon uzayı olsun. O halde X_b, X üzerinde bir idealdir ve

$$X_a \subset X_b \subset X$$

(**Pick vd., 2012**).

İspat. X üzerinde X_b nin kapalılığı hemen tanımdan gelir. Kabul edelimki $f \in X_b$ ve $g \in \mathcal{M}_0(\mathcal{R})$ olacak şekilde $\mathcal{R}$ üzerinde h.h.y$-\mu$ için $|g| \leq |f|$ olsun. Ayrıca, $\mathcal{R}$ üzerinde basit fonksiyonların bir dizisi $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ olacak şekilde

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_X = 0$$

olsun. O halde, $n \in \mathbb{N}$ ve $x \in \mathcal{R}$ için

$$g_n(x) := \text{sgn}(g(x)) \min\{|f_n(x)|, |g(x)|\}$$

gösterimi tanımlanır. O halde, $\mathcal{R}$ üzerinde her $n \in \mathbb{N}$ için g_n sınırlıdır ve

$$\mu(\text{supp} f) < \infty.$$

Ayrıca

$$\begin{aligned}|g - g_n| &= \max\{|g| - |f_n|, 0\} \\ &\leq ||f| - |f_n|| \\ &\leq |f - f_n|.\end{aligned}$$

Bu nedenle

$$\|g - g_n\|_X \leq \|f - f_n\|_X \to 0.$$

Teorem 3.2.19'dan, $g \in X_b$ elde edilir. Yani X_b, X üzerinde bir idealdir.

Son olarak, $f \in X_a$ ve sonlu pozitif ölçünün $\mathcal{R}$ üzerindeki μ-ölçülebilir alt kümelerinin bir dizisi $\{R_k\}_{k=1}^{\infty}$ olsun. O halde, Teorem 3.2.19'dan, f_k fonksiyonları, $k \in \mathbb{N}$ ve $x \in \mathcal{R}$ için

$$f_k(x) := \operatorname{sign}(f(x)) \min\{|f(x)|, k\chi_{R_k}(x)\},$$

şeklinde tanımlanır ki her $k \in \mathbb{N}$ için $f_k \in X_b$ olmasını gerektirir ve $\mathcal{R}$ üzerinde h.h.y$-\mu$ için

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x).$$

Bu durumda Teorem 3.2.15'den

$$\lim_{k\to\infty} \|f_k - f\|_X = 0.$$

Fakat, X_b, X uzayının kapalı bir alt uzayıdır, bu nedenle de $f \in X_b$ olur. Bu,

$$X_a \subset X_b$$

içermesini kanıtlar. Böylece ispat tamamlanır. ∎

Teorem 3.2.21 X bir Banach fonksiyon uzayı olsun. Bu durumda $X_a = X_b$ olması için gerek ve yeter şart sonlu ölçünün her $E \subset \mathcal{R}$ kümesi için $\chi_E \in X_a$ olmasıdır (**Pick vd., 2012**).

Teorem 3.2.22 X, bir Banach fonksiyon uzayı ve Y de X üzerinde $S \subset Y$ olacak şekilde bir ideal olsun. Bu durumda $Y^* = X' \iff Y \subset X_a$ (**Pick vd., 2012**).

Teorem 3.2.23 X, $(\mathcal{R},\ \mu)$ üzerinde bir Banach fonksiyon uzayı ve $Y \subset X$ de $S \subset Y$ şartını sağlayan X üzerindeki bir ideal olsun. O halde Y uzayının ayrılabilir olması için gerek ve yeter şart $Y = Y_a$ olması ve μ-nün bir ayrılabilir ölçü olmasıdır (**Pick vd., 2012**).

3.3 Dağılım Fonksiyonları ve Artmayan Yeniden Düzenlemeler

Tanım 3.3.1 (Dağılım Fonksiyonu) $f : (\mathcal{R}, \mu) \to \mathbb{R}$ bir ölçülebilir fonksiyon olsun. Bu durumda her $\lambda > 0$ için

$$\mu_f(\lambda) = \mu(\{x \in \mathcal{R} : |f(x)| > \lambda\}) \tag{3.17}$$

şeklinde tanımlanan μ_f fonksiyonuna f fonksiyonunun dağılım fonksiyonu denir (**Pick vd., 2012**).

Tanım 3.3.2 (Denk Ölçülebilir Fonksiyon) $f \in \mathcal{M}_0(\mathcal{R},\mu)$ ve $g \in \mathcal{M}_0(\mathcal{S},\nu)$ olsun. Eğer f ve g fonksiyonları aynı dağılım fonksiyonuna sahip ise bu fonksiyonlara denk ölçülebilirdir denir. Yani her $\lambda \geq 0$ için $\mu_f(\lambda) = \nu_g(\lambda)$ oluyorsa f ve g fonksiyonlarının denk ölçülebilir oldukları söylenir.

$$f \sim g$$

şeklinde yazılır (**Pick vd., 2012**).

Önerme 3.3.3 $f \in \mathcal{M}_0(\mathcal{R},\mu)$ olsun. Bu durumda f fonksiyonunun μ_f dağılım fonksiyonu, $[0,\infty)$ aralığı üzerinde negatif olmayan, artmayan ve sağdan sürekli bir fonksiyondur (**Pick vd., 2012**).

İspat. μ_f fonksiyonunun negatif olmayan ve artmayan olduğu açıktır.

$$E_\lambda := \{x : |f(x)| > \lambda\}, \quad \lambda \geq 0$$

olsun. O halde $\lambda_1 < \lambda_2$ için

$$E_{\lambda_2} \subset E_{\lambda_1}.$$

Ayrıca, her $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ için

$$E_{\lambda_0} = \bigcup_{\lambda > \lambda_0} E_\lambda = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_{\lambda_0 + \frac{1}{n}}.$$

Monoton yakınsaklık teoremi Teorem 2.3.18'den

$$\mu_f(\lambda_0 + \frac{1}{n}) = \mu(E_{\lambda_0+\frac{1}{n}}) \uparrow \mu(E_{\lambda_0}) = \mu_f(\lambda_0)$$

olur. Bu nedenle, μ_f sağdan süreklidir. ■

Tanım 3.3.4 (Artmayan Yeniden Düzenleme Fonksiyonu) $f \in \mathcal{M}_0(\mathcal{R},\mu)$ olsun. O halde

$$f^*(t) = \inf\{\lambda : \mu_f(\lambda) \leq t\}, \ t \in [0,\infty) \tag{3.18}$$

şeklinde tanımlanan

$$f^* : [0,\infty) \to [0,\infty)$$

fonksiyonu f fonksiyonunun artmayan yeniden düzenleme fonksiyonu olarak adlandırılır (**Pick vd., 2012**).

Uyarı 3.3.5 $f \in \mathcal{M}_0(\mathcal{R},\mu)$ fonksiyonunun dağılım fonksiyonu μ_f sürekli ve kesinlikle azalan fonksiyon ise f^* uygun bir aralık üzerinde μ_f fonksiyonunun adi tersidir. Ayrıca μ_f fonksiyonunun monotonluğundan ve (3.18) denkleminden

$$f^*(t) = \sup\{\lambda : \mu_f(\lambda) > t\} = \mu_{\mu_f}(t), \ t \geq 0 \tag{3.19}$$

elde edilir (**Pick vd., 2012**).

Uyarı 3.3.6 Kabul edelimki

$$f(x) = 1 - \frac{1}{x+1}, \quad x \in [0, \infty)$$

olsun. O halde $t \geq 0$ için $f^*(t) = 1$ şartının ispatlanması zor değildir. Bu nedenle, bir fonksiyonun artmayan yeniden düzenlemesine geçişte bazı bilgiler ifade edilmeyebilir (**Pick vd., 2012**).

Önerme 3.3.7 $f, g \in \mathcal{M}_0(\mathcal{R}, \mu)$ ve $\mathcal{M}_0(\mathcal{R}, \mu)$ üzerinde bir dizi $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ olsun. $\lambda \in \mathbb{R}$ olduğunda f^* bir negatif olmayan, artmayan, $[0, \infty)$ üzerinde sağdan sürekli bir fonksiyondur öyle ki

$$\mathcal{R}, \text{ h.h.y}-\mu, \; |g| \leq |f| \Rightarrow g^*(t) \leq f^*(t), \quad t \in [0, \mu(\mathcal{R})), \tag{3.20}$$

$$(af)^* = |a| f^*, \tag{3.21}$$

$$\mathcal{R}, \text{ h.h.y}-\mu, \; |f| \leq \liminf_{n \to \infty} |f_n| \Rightarrow f^* \leq \liminf_{n \to \infty} f_n^*. \tag{3.22}$$

Özel olarak,

$$\mathcal{R}, \text{ h.h.y}-\mu, \; |f_n| \uparrow |f| \Rightarrow f_n^* \uparrow f^*$$

(**Pick vd., 2012; Talenti, 1995**).

İspat. Bu ifadelerin doğruluğu hemen Önerme 3.3.3 ve Tanım 3.3.4'den görülebilir (**Pick vd., 2012**). ■

Önerme 3.3.8 $f, g \in \mathcal{M}_0(\mathcal{R}, \mu)$ ve $s, t \in [0, \mu(\mathcal{R}))$ olmak üzere $s + t \in [0, \mu(\mathcal{R}))$ olsun. O halde

$$(f+g)^*(s+t) \leq f^*(s) + g^*(t) \tag{3.23}$$

(**Pick vd., 2012**).

Önerme 3.3.9 $f \in M_0$ olsun. Eğer $0 < p < \infty$ ise bu durumda

$$\int_{\mathcal{R}} |f|^p \mathrm{d}\mu = p \int_0^{\infty} \lambda^{p-1} \mu_f(\lambda) \mathrm{d}\lambda = \int_0^{\infty} f^*(t)^p \mathrm{d}t. \tag{3.24}$$

Ayrıca, $p = \infty$ durumunda

$$\begin{aligned} \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \mathcal{R}} |f(x)| &= \inf\{\lambda : \mu_f(\lambda) = 0\} \\ &= f^*(0) \end{aligned} \tag{3.25}$$

olur (**Pick vd., 2012**).

3.4 Hardy-Littlewood Eşitsizliği

Önerme 3.4.1 $g \in M_+(R,\ \mu)$ ve $E \subset R$ alt kümesi μ-ölçülebilir olsun. Bu durumda

$$\int_E g\mathrm{d}\mu \leq \int_0^{\mu(E)} g^*(s)\mathrm{ds} \tag{3.26}$$

(**Pick vd., 2012**).

İspat. $\{E_j\}_{j=1}^n$, $\mathcal{R}$'nin alt kümelerinin μ-ölçülebilir sonlu bir dizisi olsun.

$$E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset E_n$$

ve ayrıca $\{\alpha_j\}_{j=1}^n$ reel sayılar olmak üzere

$$g(x) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \chi_{E_j}(x), \quad x \in \mathcal{R}.$$

O halde

$$g^*(t) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \chi_{[0,\mu(E_j))}(t), \quad t \in [0,\ \mu(\mathcal{R}))$$

olduğunu göstermek zor değildir. Bu nedenle,

$$\begin{aligned}
\int_E g\mathrm{d}\mu &= \sum_{j=1}^n \alpha_j \mu(E \cap E_j) \\
&\leq \sum_{j=1}^n \alpha_j \min(\mu(E),\ \mu(E_j)) \\
&= \sum_{j=1}^n \alpha_j \int_0^{\mu(E)} \chi_{(0,\mu(E_j))}\mathrm{ds} \\
&= \int_0^{\mu(E)} g^*(s)\mathrm{ds}
\end{aligned}$$

olduğundan negatif olmayan basit fonksiyonlar için (3.26) denklemi bulunur. Keyfi bir $g \in M^+$ için alışılmış yoğunluk argümanına başvurulur. ∎

Yeniden düzenleme altında değişmez kalan uzaylarının kuramsal olarak en önemli teorik araçlarından birisi Hardy-Littlewood eşitsizliğidir. Şimdi bu teoremi ifade ve ispat edelim.

Teorem 3.4.2 (Hardy-Littlewood) $f, g \in \mathcal{M}_0(\mathcal{R}, \mu)$ olsun. O halde

$$\int_{\mathcal{R}} |fg| d\mu \leq \int_0^\infty f^*(t) g^*(t) dt \tag{3.27}$$

(**Pick vd., 2012**).

İspat. İlk olarak Kabul edelimki f, bir negatif olmayan basit fonksiyon olsun. $\mathcal{R}$ nin $\mu-$ölçülebilir alt kümelerinin bir sonlu dizisi $\{E_j\}_{j=1}^{n}$ olsun.

$$E_1 \subset E_2 \subset \ldots \subset E_n,$$

$\{\alpha_j\}_{j=1}^{n}$ reel sayılar ve ayrıca

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \chi_{E_j}(x), \quad x \in \mathcal{R}$$

olmak üzere

$$f^*(t) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \chi_{[0,\mu(E_j))}(t).$$

Kabul edelimki $g \in M_+(\mathcal{R}, \mu)$ olsun. Önerme 3.4.1'den,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{R}} |fg| \mathrm{d}\mu &= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \int_{E_j} g \mathrm{d}\mu \\
&\leq \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \int_{0}^{\mu(E_j)} g^*(s) \mathrm{d}s \\
&= \int_{0}^{\infty} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \chi_{[0,\mu(E_j))} g^*(s) \mathrm{d}s \\
&= \int_{0}^{\infty} f^*(s) g^*(s) \mathrm{d}s
\end{aligned}$$

elde edilir. $f \in M_+(R, \mu)$ olduğunda

$$0 \leq f_j \nearrow f$$

olmak üzere monoton yakınsaklık teoremi (Teorem 2.3.18) kullanılarak bir $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ bulunur. Bu da f ve g fonksiyonları negatif olmadıklarından sonuç için iddiayı verir. Genel durum sırasıyla gelir. Çünkü sağ taraf yalnız f^* ve g^* fonksiyonlarına bağlıdır. Bu nedenle f ve g fonksiyonlarının mutlak değeri üzerindedir. İspat tamamlanmıştır. ∎

Sonuç 3.4.3 $f, g \in M_0(\mathcal{R},\ \mu)$ ve $\tilde{g} \in M_0(R,\ \mu)$ de $\mathcal{R}$ üzerinde g ile denk ölçülebilir olsun. Bu durumda

$$\int_{\mathcal{R}} |f\tilde{g}| \mathrm{d}\mu \leq \int_{0}^{\infty} f^*(t) g^*(t) \mathrm{d}t \tag{3.28}$$

(**Pick vd., 2012**).

İspat. Bu iddia, hemen Teorem 3.4.2'nin bir sonucudur ve $\tilde{g}^* = g^*$. ∎

Tanım 3.4.4 (Güçlü Rezonant) Eğer $\forall f, g \in \mathcal{M}_0(\mathcal{R}, \mu)$ için

$$\int_0^\infty f^*(t)g^*(t)dt = \sup_{\tilde{g}\sim g} \int_{\mathcal{R}} |f\tilde{g}|d\mu \tag{3.29}$$

oluyorsa σ-sonlu ölçü uzayı $(\mathcal{R}, \mu)$ rezonanttır denir. Eğer $\forall f, g \in \mathcal{M}_0(\mathcal{R}, \mu)$ ve $\exists \tilde{g} \in \mathcal{R}$ için

$$\tilde{g} \sim g$$

ve

$$\int_{\mathcal{R}} |f\tilde{g}|d\mu = \int_0^\infty f^*(t)g^*dt \tag{3.30}$$

oluyorsa güçlü rezonanttır denir (**Pick vd., 2012**).

Uyarı 3.4.5 $(\mathcal{R}, \mu)$ uzayı güçlü rezonans ise bu uzay rezonanstır (**Pick vd., 2012**).

Aşağıdaki örnekte görüldüğü üzere genelde tersi doğru değildir.

Örnek 3.4.6 Bir boyutlu $d\mu(x) = dx$ Lebesgue ölçüsüne sahip $([0, \infty), \mathrm{d}x)$ ölçü uzayı rezonanttır. Kabul edelimki f, Uyarı 3.3.6'da tanımlanan bir fonksiyon olsun. Yani,

$$f(x) = 1 - \frac{1}{x+1}, \quad x \in [0,\ \infty)$$

şeklinde verilsin. O halde, $\forall t \in [0,\ \infty)$ için $f^*(t) \equiv 1$. Şimdi kabul edelimki $g = \chi_{[0,1)}$ ve $\tilde{g} = \chi_{[1,2)}$ olsun. O halde $g^* = \tilde{g}^* = \chi_{[0,1)}$. Ayrıca,

$$\int_0^\infty f^*(t)g^*(t)\mathrm{d}t = 1$$

olduğunda

$$\int_0^\infty |f(x)\tilde{g}(x)|\mathrm{d}x = \int_1^2 \left(1 - \frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x = 1 - \log 2 < 1$$

denklemi elde edilir. Bu nedenle, verilen ölçü uzayı güçlü rezonant değildir (**Pick vd., 2012**).

Uyarı 3.4.7 Her ölçü uzayı rezonant değildir. Rezonant olmayan ölçü uzayına tipik bir örnek, denk olmayan ölçünün en az iki atomuna sahip bir atomik ölçü uzayıdır. Yani, $a, b \in \mathcal{R}$ olsun.

$$\mu(a) = \alpha \ \text{ ve } \ \mu(b) = \beta$$

olmak üzere

$$0 < \alpha < \beta.$$

$f = \chi_{\{b\}}$ ve $g = \chi_{\{a\}}$ olsun. O halde $\tilde{g} \sim g$ şartını karşılayan her $\tilde{g}$ fonksiyonu $b \notin \operatorname{supp} \tilde{g}$ ifadesine uygun olduğu açıktır. Buna bağlı olarak, böyle her $\tilde{g}$ için

$$\int_{\mathcal{R}} |f\tilde{g}| \mathrm{d}\mu = 0.$$

Diğer taraftan,

$$f^* = \chi_{[0,\beta)} \quad \text{ve} \quad g^* = \chi_{[0,\alpha)}$$

olduğundan dolayı

$$\int_0^\infty f^*(t) g^*(t) = \alpha.$$

Sonuç olarak, rezonant olabilen böyle bir ölçü yoktur (**Pick vd., 2012**).

3.5 Maksimal Artmayan Yeniden Düzenleme

E, $\mu(E) = t \in (0,\ \infty)$ şartını sağlamak üzere $\mathcal{R}$ nin μ-ölçülebilir bir alt kümesi olsun. O halde, $g = \chi_E$ alınmasıyla ve bu g fonksiyonu (3.27) Hardy-Littlewood eşitsizliği içine ilave edilmesiyle

$$\frac{1}{\mu(E)} \int_E |f| \mathrm{d}\mu \leq \frac{1}{t} \int_0^t f^*(s) \mathrm{d}s, \quad f \in M_0(\mathcal{R}, \mu) \tag{3.31}$$

elde edilir. En son ifade, yani $(0,\ t)$ aralığındaki integral üzerinde f^* nin integral ortalaması onun çok büyük bir önemi olduğu sonucuna gider. Bu kısımda (3.31) ile ifade edilen maksimal artmayan yeniden düzenlemenin temel özellikleri çalışılmıştır.

Tanım 3.5.1 $f \in M_0(\mathcal{R},\ \mu)$ için $(0,\ \mu(\mathcal{R}))$ üzerinde f^{**} fonksiyonu

$$f^{**}(t) := \frac{1}{t} \int_0^t f^*(s) \mathrm{d}s, \quad t \in (0, \mu(\mathcal{R})) \tag{3.32}$$

şeklinde tanımlanır (**Pick vd., 2012**).

Uyarı 3.5.2 $f \in M_0(\mathcal{R}, \mu)$ olsun. O halde

$$f^*(t) \leq f^{**}(t), \quad t \in (0, \mu(\mathcal{R})). \tag{3.33}$$

Gerçekten de kabul edelimki $t \in (0,\ \mu(\mathcal{R})$ olsun. O halde f^* nin monotonluğundan

$$f^{**}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t f^*(s) \mathrm{d}s \geq \frac{f^*(t)}{t} \int_0^t \mathrm{d}s = f^*(t)$$

elde edilir (**Pick vd., 2012**).

Önerme 3.5.3 $f \in M_0(\mathcal{R}, \mu)$ olsun, O halde $(0, \mu(\mathcal{R}))$ üzerinde f^{**} negatif olmayan, artmayan ve sürekli bir fonksiyondur (**Pick vd., 2012**).

İspat. $f^{**}(t)$ nin tanımından ve f^* nin monotonluğundan ya

$$\forall t \in (0,\ \mu(\mathcal{R})),\ f^{**}(t) < \infty$$

yada

$$\forall t \in (0,\ \mu(\mathcal{R})),\ f^{**}(t) = \infty$$

olduğu görülür. Açıkça görülüyor ki her durumda f^{**} negatif olmayan ve süreklidir. Ayrıca f^{**} artmayandır ve artmayan fonksiyonun bir integral ortalaması olur. Yani, Kabul edelimki $0 < s < t < \mu(\mathcal{R})$ olsun. O halde (3.33) denkleminden istenildiği gibi

$$\begin{aligned} f^{**}(t) &= \frac{1}{t}\int_0^t f^*(y)\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{t}\int_0^s f^*(y)\mathrm{d}y + \frac{1}{t}\int_s^t f^*(y)\mathrm{d}y \\ &\leq \frac{s}{t}f^{**}(s) + \frac{f^*(s)}{t}\int_s^t \mathrm{d}y \\ &= \frac{s}{t}f^{**}(s) + (1 - \frac{s}{t})f^*(s) \\ &\leq \frac{s}{t}f^{**}(s) + (1 - \frac{s}{t})f^{**}(s) \\ &= f^{**}(s). \end{aligned}$$

İspat tamamlanmıştır. ∎

Önerme 3.5.4 $f, g \in M_0(\mathcal{R}, \mu)$ fonksiyonlarının her bir çifti için $M_0(\mathcal{R}, \mu)$ sınıfından olan fonksiyonların her bir $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi ve her $a \in \mathbb{R}$ için

$$f^{**} \equiv 0 \ \Leftrightarrow\ \text{h.h.y}-\mu,\ f = 0 \tag{3.34}$$

$$\text{h.h.y}-\mu,\ 0 < g \leq f \ \Rightarrow\ g^{**} < f^{**} \tag{3.35}$$

$$(af)^{**} = |a| f^{**} \tag{3.36}$$

$$\text{h.h.y}-\mu,\ 0 \leq f_n \uparrow f \ \Rightarrow\ f_n^{**} \uparrow f^{**} \tag{3.37}$$

denklemleri elde edilir (**Pick vd., 2012; Talenti, 1995**).

İspat. f^{**} nin özelliklerinin tamamı f^* nin benzer olanlarından kolayca görülür (Önerme 3.3.7'e bakınız). ∎

Önerme 3.5.5 $t \in (0, \mu(\mathcal{R})) \cap \Re(\mu)$ ve $f \in M_0(\mathcal{R}, \mu)$ olsun.

(i) Eğer $(\mathcal{R}, \mu)$ rezonant ise bu durumda

$$f^{**}(t) = \frac{1}{t} \sup \left\{ \int_E |f| \mathrm{d}\mu ; \mu(E) = t \right\}. \tag{3.38}$$

(ii) Eğer $(\mathcal{R},\ \mu)$ güçlü rezonant ise bu durumda $\mathcal{R}$ nin $\mu(E) = t$ ile verilen bir E alt kümesi vardır öyle ki

$$f^{**}(t) = \frac{1}{t} \int_E |f| \mathrm{d}\mu \tag{3.39}$$

(**Pick vd., 2012**).

İspat. $F \subset \mathcal{R}$ olsun öyle ki $\mu(F) = t$. Bir g fonksiyonu $g = \chi_F$ şeklinde tanımlansın. O halde $g^* = \chi_{[0,t)}$ olur. Bu nedenle, eğer bir $\tilde{g} \sim g$ ise bu durumda bir $E \subset \mathcal{R}$ mevcuttur öyle ki $\mu(E) = t$ ve $|\tilde{g}| = \chi_E$. Böylece her iki gösterim de (3.29) ve (3.30) denklemlerinden gelir. ∎

Sonuç 3.5.6 $(\mathcal{R}, \mu)$ bir rezonant ölçü uzayı olsun. Kabul edelimki $f, g \in M_0(\mathcal{R}, \mu)$ ve $t \in (0, \mu(\mathcal{R})) \cap \mathfrak{R}(\mu)$ olsun. Bu durumda

$$(f + g)^{**}(t) \leq f^{**}(t) + g^{**}(t) \tag{3.40}$$

(**Pick vd., 2012**).

İspat. Bu gösterim, hemen (3.38) denkleminden ve supremumun alt toplamsallığından gelir. ∎

Uyarı 3.5.7 Sonuç 3.5.6'da ileri sürülen $f \mapsto f^{**}$ fonksiyonelinin alt toplamsallığı sadece rezonant olanlar için değil keyfi ölçü uzayları için de sağlanır. Bu, olmayana ergi yöntemiyle ispatlanabilir (**Pick vd., 2012**).

Örnek 3.5.8 Olası olmayan $f \mapsto f^{**}$ işlemi, $f \mapsto f^*$ fonksiyoneli alt toplamsaldır. (örneğin $\mathcal{R} = [0,\ \infty)$ alalım, μ bir boyutlu Lebesgue ölçüsü olsun. f ve g fonksiyonları $f = \chi_{[0,1)}$ ve $g = \chi_{[1,2)}$ şeklinde düzenlensin). $f \mapsto f^*$, zayıf özelliği veren (3.23) denklemine sahip olması halinde en iyi sonucun alınması beklenir (**Pick vd., 2012**).

3.6 Yeniden Düzenleme Altında Değişmez Kalan Uzaylar

Bu kısımda $(\mathcal{R}, \mu)$ ölçü uzayının resonant olduğu kabul edilimiştir.

Tanım 3.6.1 ϱ , $(\mathcal{R}, \mu)$ üzerinde bir Banach fonksiyon normu olsun. Eğer her denk ölçülebilir $f, g \in \mathcal{M}_0^+(\mathcal{R}, \mu)$ fonksiyon çifti için

$$\varrho(f) = \varrho(g)$$

oluyorsa ϱ normuna yeniden düzenleme altında değişmez kalan denir. Bu gibi durumlarda, Banach fonksiyon uzayına karşılık gelen $X = X(\varrho)$ uzayına yeniden düzenleme altında değişmez kalan Banach fonksiyon uzayı denilir (**Carro vd., 2005; Pick vd., 2012**).

Uyarı 3.6.2 X bir Banach fonksiyon uzayı olsun. X uzayının yeniden düzenleme altında değişmez kalan olması için gerek ve yeter şart $f \in X$ ve $g \sim f$ olduğunda $g \in X$ ve $\|g\|_X = \|f\|_X$ olmasıdır (**Carro vd., 2005; Pick vd., 2012**).

Örnek 3.6.3 Kabul edelimki $p \in [1,\ \infty]$ olsun. Bu durumda $L^p(R,\ \mu)$ Lebesgue uzayı bir yeniden düzenleme altında değişmez kalan Banach fonksiyon uzayıdır. Aslında bu, Önerme 3.3.9'dan gelir.

Uyarı 3.6.4 Çoğu durumda, verilen bir f fonksiyonuyla denk ölçülebilir bir fonksiyonun doğal seçimi onun f^* artmayan yeniden düzenlemesidir (**Pick vd., 2012**).

Önerme 3.6.5 ϱ , $(\mathcal{R}, \mu)$ üzerinde yeniden düzenleme altında değişmez kalan fonksiyon normu olsun. Bu durumda ϱ normunun ϱ' ilişik normu da yeniden düzenleme altında değişmez kalandır. Ayrıca,

$$\varrho'(g) = \sup \left\{ \int_0^{\mu(\mathcal{R})} f^*(t) g^*(t) \mathrm{d}t : \varrho(f) \leq 1 \right\},\ g \in M_0^+, \tag{3.41}$$

ve

$$\varrho(f) = \sup \left\{ \int_0^{\mu(\mathcal{R})} f^*(t) g^*(t) \mathrm{d}t : \varrho'(g) \leq 1 \right\},\ f \in M_0^+ \tag{3.42}$$

elde edilir (**Pick vd., 2012**).

İspat. Tanım 3.2.1'den bilindiği üzere

$$\varrho'(g) = \sup \left\{ \int_{\mathcal{R}} |fg| \mathrm{d}\mu : \varrho(f) \leq 1 \right\},\ g \in M_0^+. \tag{3.43}$$

Hemen ilk olarak, (3.27) denklemiyle verilen Hardy-Littlewood eşitsizliğinden anlaşıldığı üzere $g \in M_0^+$ için

$$\varrho'(g) \leq \sup \left\{ \int_0^{\mu(\mathcal{R})} f^*(t) g^*(t) \mathrm{d}t : \varrho(f) \leq 1 \right\}.$$

Ters eşitsizliği ispat etmek için, ϱ normunun yeniden düzenlemesi, f ile denk ölçülebilir her $\tilde{f}$ için $\varrho(\tilde{f}) = \varrho(f)$ olmasını garantilediğine dikkat edilmelidir. Böylece, $(\mathcal{R}, \mu)$ ölçü uzayının rezonansından dolayı, $\forall g \in M_0(R,\mu)$ için

$$\sup\left\{\int\limits_0^{\mu(\mathcal{R})} f^*(t)g^*(t)\mathrm{d}t : \varrho(f)\leq 1\right\} = \sup\left\{\int\limits_{\mathcal{R}} |\tilde{f}g|\mathrm{d}\mu : \tilde{f}\sim f, \varrho(f)\leq 1\right\}$$

$$\geq \sup\left\{\int\limits_{\mathcal{R}} |fg|\mathrm{d}\mu : \varrho(f)\leq 1\right\}.$$

Bu tümüyle (3.41) denklemini verir. Sonuç itibariyle, ϱ' yerine ϱ'' gösteriminin evvelce yapılan ispata uygulanması ve Teorem 3.2.7'nin kullanılması ile (3.42) elde edildi. Böylece ispat tamamlanır. ■

Teorem 3.6.6 (Hölder Eşitsizliği) ϱ , rezonant ölçü uzayı $(\mathcal{R},\mu)$ üzerinde bir yeniden düzenleme altında değişmez kalan norm olsun. Eğer $f,g \in M_0^+(\mathcal{R},\mu)$ ise bu durumda

$$\int\limits_{\mathcal{R}} fg\mathrm{d}\mu \leq \int\limits_0^{\mu(\mathcal{R})} f^*(s)g^*(s)\mathrm{d}s \leq \varrho(f)\varrho'(g) \tag{3.44}$$

(**Pick vd., 2012**).

İspat. Teoremin ispatı, hemen Teorem 3.4.2 ve Önerme 3.6.5'den gelir. ■

Biraz önce normlar için elde edilen sonuçların uzay biçimlerinin de formüle edilmesi yararlı olacaktır.

Sonuç 3.6.7 X, rezonant ölçü uzayı üzerinde bir Banach fonksiyon uzayı olsun. O halde X, yeniden düzenleme altında değişmez kalan olması için gerek ve yeter şart X' ilişik uzayının yeniden düzenleme altında değişmez kalan olmasıdır. Ayrıca,

$$\|g\|_{X'} = \sup\left\{\int\limits_0^{\mu(\mathcal{R})} f^*(t)g^*(t)\mathrm{d}t : \|f\|_X\leq 1\right\}, \quad g\in X' \tag{3.45}$$

ve

$$\|f\|_{X} = \sup\left\{\int\limits_0^{\mu(\mathcal{R})} f^*(t)g^*(t)\mathrm{d}t : \|g\|_{X,}\leq 1\right\}, \quad f\in X \tag{3.46}$$

elde edilir (**Pick vd., 2012**).

Sonuç 3.6.8 (Hölder Eşitsizliği) X, rezonant ölçü uzayı $(\mathcal{R},\mu)$ üzerinde bir Banach fonksiyon uzayı olsun. Eğer $f\in X$ ve $g\in X'$ ise bu durumda

$$\int\limits_{\mathcal{R}} |fg|\mathrm{d}\mu = \int\limits_0^{\mu(\mathcal{R})} f^*(t)g^*(t)\mathrm{d}t \leq \|f\|_X\|g\|_{X'} \tag{3.47}$$

(**Pick vd., 2012**).

Örnek 3.6.9 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ uygun bir tanım kümesi olsun.

(i) $1 \leq p \leq \infty$ olsun. Bu durumda Lebesgue uzayı $L^p(\Omega)$ bir yeniden düzenleme altında değişmez kalan Banach fonksiyon uzayıdır.

(ii) $1 \leq p \leq \infty$ olsun ve ϱ da Ω üzerinde bir ağırlık olsun. Bu durumda ağırlıklı Lebesgue uzayı $L^p(\Omega, \varrho)$, genelde bir yeniden düzenleme altında değişmez olmayan Banach fonksiyon uzayıdır.

(iii) Φ bir Young fonksiyonu olsun. Bu durumda Orlicz uzayı $L^{\Phi}(\Omega)$, bir yeniden düzenleme altında değişmez kalan Banach fonksiyon uzayıdır.

(iv) $\lambda \geq 0$ ve $p \in (1, \infty)$ olsunlar. Bu durumda Morrey uzayı $L^{p;\lambda}_{\mathcal{M}}(\Omega)$, bir yeniden düzenleme altında değişmez olmayan Banach fonksiyon uzayıdır.

(**Pick vd., 2012**)

3.7 Temel Fonksiyon

Bu kısımda, verilen bir yeniden düzenleme altında değişmez kalan Banach fonksiyon uzayının temel fonksiyon diye adlandırılan çok önemli bir karakteristiği incelenmiştir. Ayrıca, bu kısım boyunca bütün yeniden düzenleme uzaylarının bir rezonant ölçü uzayı $(\mathcal{R},\ \mu)$ üzerinde olduğu kabul edilmiştir.

Tanım 3.7.1 (Temel Fonksiyon) X, bir yeniden düzenleme altında değişmez kalan Banach fonksiyon uzayı olsun. Kabul edelimki $t \in \Re(\mu)$ olsun. O halde

$$\varphi_X(t) := \|\chi_E\|_X, \quad t \in \Re(\mu) \tag{3.48}$$

olmak üzere

$$\varphi_X : \Re(\mu) \to [0, \infty)$$

şeklinde bir fonksiyon tanımlansın. Bu fonksiyona, X uzayının temel fonksiyonu denir (**Pick vd., 2012**).

Uyarı 3.7.2 Her yeniden düzenleme altında değişmez kalan Banach fonksiyon uzayı X için temel fonksiyonun (3.48) denkleminden iyi tanımlı olduğunu kesinlikle sağlanmalıdır. Bu maksatla, $\varphi_X(t)$ fonksiyonunun değeri E kümesinin seçiminden bağımsız olduğuna dikkat edilmelidir. Gerçekten, eğer $\tilde{E}$ böyle olan başka bir küme ise bu durumda

$$(\chi_E)^* = (\chi_{\tilde{E}})^* = \chi_{[0,\mu(E))}.$$

Böylece,

$$\|\chi_E\|_X = \|\chi_{\tilde{E}}\|_X$$

(**Pick vd., 2012**).

Örnek 3.7.3 Kabul edelimki $(\mathcal{R}, \mu)$ atomik olmayan bir ölçü uzayı olsun.

(i) $p \in [1, \infty)$ olmak üzere $X = L^p(\mathcal{R}, \mu)$ olsun. Bu durumda

$$\varphi_X(t) = t^{\frac{1}{p}}, \ t \in [0, \mu(\mathcal{R})). \tag{3.49}$$

(ii) $X = L^\infty(\mathcal{R}, \mu)$ olsun. Bu durumda

$$\varphi_X(t) = \begin{cases} 1, & t \in (0, \mu(\mathcal{R})), \\ 0, & t = 0. \end{cases} \tag{3.50}$$

(iii) Φ, bir Young fonksiyonu olsun. $L^\Phi(\mathcal{R}, \mu)$, Orlicz normuna sahip Orlicz uzayı ve $X = L^\Phi$ olsun. Ψ ise Φ fonksiyonunun tümleyen Young fonksiyonunu göstersin. Bu durumda

$$\varphi_X(t) = \begin{cases} t\Psi^{-1}\left(\frac{1}{t}\right), & t \in (0, \mu(\mathcal{R})), \\ 0, & t = 0. \end{cases}$$

(iv) Φ, bir Young fonksiyonu olsun. $L^\Phi(\mathcal{R}, \mu)$, Orlicz normuna sahip Orlicz uzayı ve $X = L^\Phi$ olsun. Bu durumda

$$\varphi_X(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Phi^{-1}\left(\frac{1}{t}\right)}, & t \in (0, \mu(\mathcal{R})), \\ 0, & t = 0 \end{cases} \tag{3.51}$$

(**Musielak, 1983; Pick vd., 2012; Rao ve Ren, 1991**).

Örnek 3.7.4 Kabul edelimki m sayma ölçüsü olduğunda $(\mathcal{R},\ \mu) = (\mathbb{N} \cup \{0\},\ m)$ olsun.

(i) $p \in [1,\ \infty)$ olmak üzere $X = \ell^p$ olsun. Bu durumda

$$\varphi_X(n) = n^{\frac{1}{p}}, \ n \in \mathbb{N}. \tag{3.52}$$

(ii) $X = \ell^\infty$ olsun. Bu durumda

$$\varphi_X(n) = \begin{cases} 0, & n = 0, \\ 1, & n \in \mathbb{N} \end{cases} \tag{3.53}$$

(**Pick vd., 2012**).

Temel fonksiyonların en önemli işlevlerinden biri de ilişik uzayların nasıl ifade edildiğiyle ilgilidir. Aşağıda bazı genel sonuçlar verilmiştir.

Teorem 3.7.5 X, bir yeniden düzenleme altında değişmez kalan Banach fonksiyon uzayı ve X' de X in ilişik uzayı olsun. Bu durumda

$$\forall t \in [0,\ \infty) \cap \mathfrak{R}(\mu)$$

için

$$\varphi_X(t)\varphi_{X'}(t) = t \tag{3.54}$$

(**Pick vd., 2012**).

İspat. Her temel fonksiyon $\varphi_X(0) = 0$ durumunu sağlar öyle ki bu iddia $t = 0$ için aşikardır. Kabul edelimki $t \in (0,\ \infty) \cap \mathfrak{R}(\mu)$ olsun. Bu durumda $\mu(E) = t$ şartını sağlayan bir $E \subset \mathcal{R}$ ölçülebilir kümesi mevcuttur. (3.47) Hölder eşitsizliğinden,

$$t = \int_E \mathrm{d}\mu \leq \|\chi_E\|_X \|\chi_E\|_{X'} = \varphi_X(t)\varphi_{X'}(t)$$

elde edilir. Tersi durumda,

$$\varphi_X(t) = \|\chi_E\|_X = \sup\left\{ \int_E g\mathrm{d}\mu : g \in X', g \geq 0, \|g\|_{X'} \leq 1 \right\}. \tag{3.55}$$

$\|g\|_{X'} \leq 1$ şartını sağlayan $g \in X'$, negatif olmayan bir fonksiyon olsun ve

$$h(x) := \left(\frac{1}{t} \int_E g\mathrm{d}\mu \right) \chi_E(x)\ ,\ \ x \in \mathcal{R}$$

gösterilsin. Şimdiyse Teorem 7.8.1 kullanılarak

$$\left(\frac{1}{t} \int_E g\mathrm{d}\mu \right) \varphi_{X'}(t) = \|h\|_{X'} \leq \|g\|_{X'} \leq 1 \tag{3.56}$$

elde edilir. Sonuç olarak, sol tarafta böyle g fonksiyonlarının tamamı üzerinde supremum alınır ve (3.55) denklemi kullanılır. Buradan istenildiği üzere

$$\frac{\varphi_X(t)\varphi_{X'}(t)}{t} \leq 1$$

ters eşitsizliği elde edilir. İspat tamamlandı. ■

Uyarı 3.7.6 X, bir yeniden düzenleme altında değişmez kalan Banach fonksiyon uzayı ve φ_X onun temel fonksiyonu olsun. Bu durumda φ_X, $[0, \mu(\mathcal{R}))$ üzerinde azalmayandır, yalnız ve yalnız sıfırda yok olur ve $(0,\ \mu(\mathcal{R}))$ üzerinde süreklidir. (sadece orijin üzerinde mümkün olan süreksizlikle beraber - bakınız Örnek 3.7.3 (ii)), ve

$$\frac{t}{\varphi_X(t)},\quad (0,\ \mu(\mathcal{R}))\text{ üzerinde azalmayandır.} \tag{3.57}$$

Aslında, $[0,\ \mu(\mathcal{R}))$ üzerinde φ_X fonksiyonunun monotonluğu, Banach fonksiyon uzaylarının (Uyarı 3.1.10 (i)) latis özelliğinin doğrudan bir sonucudur. X', bir yeniden düzenleme altında değişmez kalan Banach fonksiyon uzayı olduğundan $\varphi_{X'}$ fonksiyonu da $[0, \mu(\mathcal{R}))$ üzerinde azalmayandır. Ayrıca, (3.54) denkleminden,

$$\varphi_{X'}(t) = \frac{t}{\varphi_X(t)},\quad t \in (0, \mu(\mathcal{R}))$$

elde edilir. Sonuç olarak, (3.57) denklemi elde edilir. $(\mathcal{R}, \mu)$ atomik olduğunda, φ_X doğrudan sürekli olur. Eğer $(\mathcal{R}, \mu)$ atomik olmayan ise bu durumda φ_X fonksiyonunun monotonluğu sadece $(0, \infty)$ üzerinde onun süreksizliğinin sayılabilir birçok noktasının varlığını gerektirir. Öyle ki bu, (3.57)'dan dolayı mümkün değildir (**Pick vd., 2012**).

Teorem 3.7.7 $(\mathcal{R}, \mu)$, bir atomik olmayan ölçü ve X de $(\mathcal{R}, \mu)$ üzerinde yeniden düzenleme altında değişmez kalan uzay olsun. Bu durumda aşağıdaki şartlar X üzerinde eşdeğerdir;

(i) $\lim_{t\to 0+} \varphi_X(t) = 0$

(ii) $X_a = X_b$

(iii) $(X_b)^* = X'$

Eğer, bir de μ ayrılabilir ise bu durumda (i), (ii) ve (iii) özelliklerinin her biri dördüncü şarta eşit olur;

(iv) X_b ayrılabilirdir (**Pick vd., 2012**).

İspat. Teorem 3.2.22'den (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) olduğu görülür. μ, bir ayrılabilir ölçü olduğunda Teorem 3.2.23'den (ii) $\Leftrightarrow$ (iv) olur. Kabul edelimki (i) şartı sağlansın ve $E \subset \mathcal{R}$ için $\mu(E) < \infty$ olsun. O halde $\chi_E \in X_a$ olduğu iddia edilir. Gerçekten de h.h.y$-\mu$ için $E_n \downarrow \emptyset$. Bu durumda yakınsaklık teoremi yardımıyla $\mu(E \cap E_n) \downarrow 0$ elde edilir. Bu nedenle

$$\begin{aligned}\|\chi_E \chi_{E_n}\|_X &= \|\chi_{E\cap E_n}\|_X \\ &\leq \varphi_X(\mu(E \cap E_n)) \downarrow 0.\end{aligned}$$

Teorem 3.2.21'den bu, (ii) şartını sağlar. Böylece (i) $\Rightarrow$ (ii) gösterilmiş olur.

Şimdi, tersine (ii) şartı sağlansın. Yani, $X_a = X_b$ olur. $0 < \mu(\mathcal{R}) < \infty$ ve $E \subset \mathcal{R}$ olsun. $(\mathcal{R}, \mu)$ atomik olmayan ölçü için E nin alt kümelerinin bir $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi mevcuttur öyle ki $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\mu(E_n) = 2^{-n}\mu(E)$ ve $E_{n+1} \subset E_n$. Bu durumda h.h.y$-\mu$ için $E_n \downarrow \emptyset$ ve (ii) şartından $\chi_E \in X_a$ olduğu görülür. Bu nedenle,

$$\varphi_X(2^{-n}\mu(E)) = \|\chi_{E_n}\|_X = \|\chi_E \chi_{E_n}\|_X \downarrow 0.$$

Çünkü φ_X, $(0, \mu(\mathcal{R}))$ üzerinde azalmayandır ki bu, (i) şartını gösterir. İspat tamamlanmıştır (**Pick vd., 2012**). ■

Uyarı 3.7.8 Eğer $\lim_{t\to 0+} \varphi_X(t) > 0$ ise bu durumda $X_a = \{0\}$.

Bunu göstermek için Kabul edelimki $0 \not\equiv f \in X_a$ olsun. Bu durumda $\varepsilon > 0$ ve bir $E \subset \mathcal{R}$ kümesi için $\mu(E) < \infty$ olmak üzere $\varepsilon\chi_E \leq f$. Bu nedenle $\chi_E \in X_a$. Teorem 3.2.16'den dolayı, X_a bir idealdir. Bu durumda (Teorem 3.7.7'nin ispatında bu iddia kullanıldı) $t \downarrow 0$ olduğunda $\varphi_X(t) \downarrow 0$.

φ fonksiyonu, $a \in (0,\ \infty]$ için $[0,\ a)$ biçimindeki bir aralık üzerinde tanımlanması ve bazı yeniden düzenleme altında değişmez kalan Banach fonksiyon uzaylarının bir temel fonksiyonu olması halinde Uyarı 3.7.6'da bahsedilen özellikler sağlanmak zorundadır. Bu koşullara uyan fonksiyonlarının sınıfını birer birer almak kullanışlı olacaktır (**Pick vd., 2012**).

Tanım 3.7.9 $a \in (0,\ \infty]$ olsun. Eğer

$$\varphi(t) = 0 \ \Leftrightarrow \ t = 0, \tag{3.58}$$

$$\frac{t}{\varphi(t)}, \quad (0, a) \text{ üzerinde azalmayandır} \tag{3.59}$$

ise bu durumda bir azalmayan $\varphi\ :\ [0, a) \to [0, \infty)$ fonksiyonu $[0, a)$ üzerinde kuasi-konkav diye adlandırılır (**Pick vd., 2012**).

Uyarı 3.7.10 Yalnız orjinde sıfır olan $a \in (0, \infty]$ ile verilen $[0, a)$ üzerinde her negatif olmayan konkav fonksiyon kendiliğinden $[0, a)$ üzerinde kuasi-konkavdır. Tersi doğru değildir. Örneğin, $a = \infty$ alalım, Bu durumda

$$\varphi(t) := \begin{cases} \max\{1, t\}, & t \in (0, \infty) \\ 0, & t = 0 \end{cases}$$

fonksiyonu kuasi-konkavdır ama $[0, a)$ üzerinde konkav değildir (**Pick vd., 2012**).

Uyarı 3.7.11 Eğer X, yeniden düzenleme altında değişmez kalan Banach fonksiyon uzayı ve φ_X onun temel fonksiyonu ise bu durumda φ_X fonksiyonunun $[0, \mu(\mathcal{R}))$ üzerinde kuasi-konkav olduğu Uyarı 3.7.6'den dolayı doğrudur. Tersi de bir bakıma doğrudur Şöyle ki, eğer φ, $[0, \infty)$ üzerinde bir kuasi-konkav fonksiyon ise bu durumda en az bir X yeniden düzenleme altında değişmez kalan Banach fonksiyon uzayı mevcuttur öyle ki $\varphi = \varphi_X$ (**Pick vd., 2012**).

Şimdi, basit ama kullanışlı bir eşitsizlikle bu kısmı bitirelim.

Lemma 3.7.12 X, bir yeniden düzenleme altında değişmez kalan Banach fonksiyon uzayı ve φ_X onun temel fonksiyonu olsun. Bu durumda,

$$\forall t \in (0, \infty) \cap \mathfrak{R}(\mu) \ \text{ ve } \ f \in (M(\mathcal{R}, \mu)$$

için

$$\int_0^t f^*(s)\mathrm{d}s \le \varphi_X(t)\|f\|_{X'} \tag{3.60}$$

eşitsizliği elde edilir (**Pick vd., 2012**).

İspat. $t \in (0, \infty)\ \cap \mathfrak{R}(\mu)$ olduğunda $\mathcal{R}$ nin bir μ-ölçülebilir E alt kümesi vardır öyle ki $\mu(E) = t$ olur. Bu nedenle, Hölder eşitsizliğinden (Teorem 3.2.5), istenildiği gibi

$$\begin{aligned} \int_0^t f^*(s)\mathrm{d}s &= \int_0^\infty \chi_E^*(s) f^*(s)\mathrm{d}s \\ &\le \|\chi_E\|_X \|f\|_{X'} \\ &= \varphi_X(t)\|f\|_{X'}. \end{aligned}$$

İspat tamamlanmıştır. ∎

4 BANACH FONKSİYON UZAYLARINDA MAKSİMAL OPERATÖRÜ VE HİLBERT DÖNÜŞÜMÜNÜN SINIRLILIKLARI

Bu bölümde, maksimal operatörü ve Hilbert dönüşümünün Banach fonksiyon uzaylarındaki sınırlılıkları ile ilgili incelemelere yer verilmiştir.

Önerme 4.0.13 Her $t > 0$ için $E_t : \overline{X} \to \overline{X}$ operatörü sınırlıdır. h_X, $(0, \infty)$ üzerinde artan ve alt toplamsaldır, $h_X(1) = 1$ durumunu sağlar ve

$$h_X(t) \leq \max(1, t), \quad 0 < t < \infty. \tag{4.1}$$

Ayrıca, eğer X', X uzayının ilişik uzayını gösteriyorsa bu durumda

$$h_X(t) = t h_{X'}\left(\frac{1}{t}\right), \quad 0 < t < \infty \tag{4.2}$$

(**Bennett ve Sharpley, 1988**).

Tanım 4.0.14 X, bir yeniden düzenleme altında değişmez kalan Banach fonksiyon uzayı olsun. X uzayının Boyd indisleri olan $\underline{\alpha}_X$ ve $\overline{\alpha}_X$ sayıları aşağıdaki gibi tanımlanır;

$$\underline{\alpha}_X = \sup_{0<t<1} \frac{\log h_X(t)}{\log t}, \quad \overline{\alpha}_X = \inf_{1<t<\infty} \frac{\log h_X(t)}{\log t} \tag{4.3}$$

(**Boyd, 1969**).

Önerme 4.0.15 X uzayının $\underline{\alpha} = \underline{\alpha}_X$ ve $\overline{\alpha} = \overline{\alpha}_X$ indisleri

$$\underline{\alpha}_X = \sup_{t\to 0^+} \frac{\log h_X(t)}{\log t}, \quad \overline{\alpha}_X = \inf_{t\to\infty} \frac{\log h_X(t)}{\log t} \tag{4.4}$$

limitleriyle verilir ve bu indisler için

$$0 \leq \underline{\alpha} \leq \overline{\alpha} \leq 1 \tag{4.5}$$

şartı sağlanır. Ayrıca, X' ilişik uzayının $\underline{\alpha}' = \underline{\alpha}_X$ ve $\overline{\alpha}' = \overline{\alpha}_X$ indisleri

$$\underline{\alpha}' = 1 - \overline{\alpha}, \quad \overline{\alpha}' = 1 - \underline{\alpha} \tag{4.6}$$

şeklinde verilirler (**Bennett ve Sharpley, 1988; Boyd, 1969**).

İspat. Bu özdeşlik

$$\frac{\log h_x(t)}{\log t} = 1 - \frac{\log h_x(1/t)}{\log(1/t)}, \qquad 0 < t < \infty \tag{4.7}$$

(4.2) denkleminin yakın bir sonucudur. Hemen (4.7) ve (4.3) denklemlerinden görüldüğü üzere bu (4.6) ile ilgilidir. Önerme 4.0.13'de h_x için ifade edilen özellikler $\overline{\alpha}$ üst indeksinin

$$\overline{\alpha}(\Psi) = \lim_{t\to\infty} \frac{\log \Psi(t)}{\log t} = \inf_{t>1} \frac{\log \Psi(t)}{\log t}$$

ile tanımlanan $\overline{\alpha}(h_x)$ sabitiyle çakıştığını gösterir ve bu nedenle (4.4) denklemindeki bu özdeşliklerin ikincisinden gelir. Şimdi (4.4) denklemindeki ilk özdeşlik (4.6) ve (4.7) denklemlerinin kullanılmasıyla ikincisinden gelir. (4.1) ve (4.3) denklemlerinden $\overline{\alpha} \leq 1$ elde edilir. Bu sonucun X' uzayına uygulanması ile $\underline{\alpha} = 1 - \overline{\alpha}' \geq 0$ elde edilir. Böylece, sadece $\underline{\alpha} \leq \overline{\alpha}'$ koşulunun gösterilmesi kalır. h, alt çarpımsal olduğundan $1 = h_x(1) \leq h_x(1/t)$ eşitsizliği elde edilir. Bu nedenle, $\forall t > 1$ için

$$\frac{\log h_x(1/t)}{\log(1/t)} = \frac{\log\left(\frac{1}{h_x(1/t)}\right)}{\log t} \leq \frac{\log h_x(t)}{\log t}.$$

$t \to \infty$ durumunda (4.3) denkleminden istendiği üzere $\underline{\alpha} \leq \overline{\alpha}$ elde edilir. ∎

Tanım 4.0.16 P_a, $0 < a \leq 1$ için $\mathcal{M}_+(\mathcal{R}, \mu)$ üzerinde

$$(P_a f)(t) = t^{-a} \int\limits_0^t s^a f(s) \frac{ds}{s}, \quad 0 < t < \infty \tag{4.8}$$

ile tanımlı integral operatörü olsun. Benzer şekilde, Q_a da $0 \leq a < 1$ için $\mathcal{M}_+(\mathcal{R}, \mu)$ üzerinde

$$(Q_a f)(t) = t^{-a} \int\limits_0^\infty s^a f(s) \frac{ds}{s}, \quad 0 < t < \infty \tag{4.9}$$

şeklinde tanımlı integral operatörü olsun. $a + b = 1$ olduğunda Q_b, P_a operatörünün düzgün adjointi olduğuna dikkat edilir. Yani, integrasyon sırasına göre yer değiştirirken integralleri mevcut olan tüm f ve g fonksiyonları için

$$\int\limits_0^\infty (P_a f)(t) g(t) dt = \int\limits_0^\infty f(t)(Q_b g)(t) dt \tag{4.10}$$

olduğu görülür (**Bennett ve Sharpley, 1988**).

4.1 Maksimal Operatörünün Banach Fonksiyon Uzaylarında Sınırlılığı

Bu kısımda maksimal operatörünün Banach fonksiyon uzaylarındaki sınırlığı incelenmiştir. Öncelikle gerekli olan bazı tanım ve teoremler ispatsız olarak aşağıda verilmiştir.

Tanım 4.1.1 $\mathbb{R}^n$ üzerinde her lokal integrallenebilir f fonksiyonu için

$$c(Mf)^*(t) \leq f^{**}(t) \leq c'(Mf)^*(t), \quad t > 0 \tag{4.11}$$

olacak şekilde yalnız n boyutuna bağlı c ve c' sabitleri vardır (**Bennett ve Sharpley, 1988**).

Lemma 4.1.2 $\Psi(1) = 1$ şartını sağlayan Ψ, $(0, \infty)$ üzerinde bir artan alt toplamsal fonksiyon ve a bir keyfi pozitif sayı olsun. Bu durumda $\overline{\alpha}(\Psi) < a$ olması için gerek ve yeter koşul

$$\int_1^\infty t^{-a}\Psi(t)\frac{\mathrm{d}t}{t} < \infty$$

olmasıdır (**Bennett ve Sharpley, 1988**).

Teorem 4.1.3 P_a operatörünün $\overline{X}$ üzerinde sınırlı olması için gerek ve yeter şart $a > \overline{\alpha}_X$ olmasıdır ve Q_a operatörünün $\overline{X}$ üzerinde sınırlı olması için gerek ve yeter şart $a < \underline{\alpha}_X$ olmasıdır (**Bennett ve Sharpley, 1988**).

İspat. İlk olarak kabul edelimki P_a operatörü $\overline{X}$ üzerinde sınırlı olsun. f ve g fonksiyonları $\overline{X}$ ve $\overline{X}'$ üzerinde birer fonksiyon olsunlar. Bunlar sırasıyla

$$\|f\|_{\overline{X}} \leq 1 \quad \text{ve} \quad \|g\|_{\overline{X}'} \leq 1. \tag{4.12}$$

Bu durumda

$$\int_0^\infty f^*(s/t)g^*(s)ds \downarrow t$$

ve böyle her bir $t > 0$ sabiti için

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty f^*\left(\frac{s}{t}\right) g^*(s)ds &= at^a \left(\int_0^\infty f^*\left(\frac{s}{t}\right) g^*(s)ds\right)\left(\int_0^{1/t} u^{a-1}du\right) \\
&\leq at^a \int_0^{1/t}\left(\int_0^\infty f^*(su)g^*(s)ds\right) u^{a-1}du \\
&= at^a \int_0^\infty g^*(s)\left(\int_0^{1/t} f^*(su)u^a\frac{du}{u}\right) ds
\end{aligned}$$

elde edilir. Eğer $t > 1$ ise $0 \leq u \leq 1$ için iç integraldeki integrasyonun aralığı genişletilebilir. Bu durumda, değişken değiştirmesi yardımıyla (4.12) denkleminden

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty f^*\left(\frac{s}{t}\right) g^*(s)ds &\leq at^a \int_0^\infty g^*(s)\left(s^{-a}\int_0^s f^*(v)v^a\frac{d\nu}{\nu}\right) ds \\
&= at^a \int_0^\infty g^*(s)(P_a f^*)(s)ds \\
&\leq at^a \|P\|_{\mathcal{B}(\overline{X})}
\end{aligned}$$

elde edilir. (4.12) denklemini sağlayan f ve g fonksiyonlarının tamamı üzerinde supremum alınırsa

$$h_X(t) = \|E_{1/t}\|_{\mathcal{B}(\overline{X})} \leq at^a\|P_a\|_{\mathcal{B}(\overline{X})}, \quad t > 1$$

elde edilir. Bu nedenle, $t \to \infty$ olduğunda

$$\frac{\log h_X(t)}{\log t} \leq a + \frac{\log(a\|P_a\|)}{\log t} \to a$$

olur ve böylece $\overline{\alpha}_X \leq a$ olduğu (4.4) denkleminden gelir. Bu şekilde,

$$\|P_a\| = \|P_a\|_{\mathcal{B}(\overline{X})} < \infty \;\Rightarrow\; a > \overline{\alpha}_X \tag{4.13}$$

olduğu gösterilmiş olur. Şimdi, $a > \overline{\alpha}_X$ tam eşitsizliğini elde etmek gerekir. Yeterince küçük $\varepsilon > 0$ seçilsin öyle ki $\varepsilon\|P_a\| < 1$ olsun. Bu durumda $(1 - \varepsilon P_a) \in \mathcal{B}(\overline{X})$ operatörü ters çevirilebilirdir ve yakınsaması $\mathcal{B}(\overline{X})$ in normu altında olduğunda

$$(I - \varepsilon P_a)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n P_a^n. \tag{4.14}$$

Bu nedenle

$$T = P_a(I - \varepsilon P_a)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n P_a^{n+1} \tag{4.15}$$

operatörü de $\mathcal{B}(\overline{X})$ altındadır. Buradan, P_a operatörünün P_a^{n+1} yinelemesinin

$$(P_a^{n+1} f)(t) = \int_0^1 f(st)\frac{(\log 1/s)^n}{n!} s^{a-1} ds \tag{4.16}$$

kapalı formda yazılabilir olduğu iddia edilir. İspat, n üzerinde tümevarım ile devam eder. $n = 0$ durumu doğrudan P_a nın tanımından gelir, böylece $n = 0, 1, 2, \ldots, N$ için (4.16) denkleminin sağladığı kabul edilir. Bu durumda

$$\begin{aligned}(P_a^{N+1} f)(t) = P_a(P_a^N f)(t) &= \int_0^1 P_a^N f(rt) r^{a-1}) dr \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^1 f(srt)\frac{(\log 1/s)^N}{N!} s^{a-1} ds \right) r^{a-1} dr\end{aligned}$$

için $u = rs$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$(P_a^{N+1} f)(t) = \int_0^1 \left(\int_0^r f(ut)\frac{(\log r/u)^N}{N!} u^{a-1} du \right) \frac{dr}{r}$$

elde edilir. İntegralleme sırasına göre değişim ve $v = r/u$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$\begin{aligned}(P_a^{N+1} f)(t) &\int_0^1 \left(\int_u^1 \frac{(\log r/u)^N}{N!} \frac{dr}{r} \right) f(ut) u^{a-1} du \\ &\int_0^1 \left(\int_1^{1/u} \frac{(\log v)^N}{N!} \frac{dv}{v} \right) f(ut) u^{a-1} du \\ &\int_0^1 \frac{(\log 1/u)^{N+1}}{(N+1)!} f(ut) u^{a-1} du\end{aligned}$$

elde edilir. Tümevarımı tamamlanır ve bu nedenle her n sayısı için (4.16) denklemi bulunur.

(4.15), (4.16) ve Teorem 2.3.44'ün kullanımıyla, $\overline{X}$ altındaki negatif olmayan f fonksiyonları için

$$(Tf)(t) = \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\varepsilon \log 1/s)^n}{n!} \right) f(st)s^{a-1}ds = \int_0^1 f(st)s^{a-\varepsilon-1}ds$$

elde edilir. Pozitif ve negatif kısımları içindeki bir fonksiyon bölmenin alışılmış aracıyla, $\overline{X}$ içindeki bütün f fonksiyonları için bu özdeşlik elde edilir. Bu nedenle, $T = P_{a-\varepsilon}$ olur. $T \in \mathcal{B}(\overline{X})$ olduğundan dolayı $a - \varepsilon \geq \overline{\alpha}_X$ eşitsizliğini elde etmek için (4.13) denklemi uygulanır. Bu durumda, istenildiği üzere $a > \overline{\alpha}_X$ olur.

Tersi durumda $a > \overline{\alpha}_X$ olduğunu kabul edelim. O halde Lemma 4.1.2'den

$$\int_0^1 \|E_s\|_{\mathcal{B}(\overline{X})} S^{a-1}ds = \int_1^{\infty} t^{-a} h_X(t) \frac{dt}{t} < \infty. \tag{4.17}$$

Bu nedenle, eğer f ve g (4.12) denklemini sağlıyorsa

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{\infty} (P_a f)(t) g(t) dt \right| &\leq \int_0^{\infty} \left(\int_0^1 |f(st)| s^{a-1} ds \right) |g(t)| dt \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^{\infty} |f(st) g(t)| \right) s^{a-1} ds \\ &\leq \int_0^1 \|E_s\|_{\mathcal{B}(\overline{X})} S^{a-1} ds. \end{aligned}$$

(4.17) denkleminin kullanılması ve (4.12) denklemini sağlayan bütün f ve g fonksiyonları üzerinde supremum alınmasıyla, P_a nın $\overline{X}$ üzerinde bir sınırlı operatör olduğu görülür. Bu nedenle P_a operatörünün $\overline{X}$ üzerinde sınırlı olduğu göstermek için gerek ve yeter şart $a > \overline{\alpha}_X$ olmasıdır.

Eğer $0 \leq a < 1$ olmak üzere (4.10) denkleminden görüldüğü gibi $\overline{X}$ üzerinde Q_a operatörünün sınırlı olması için gerek ve yeter şart P_{1-a} operatörünün $\overline{X}'$ üzerinde sınırlı olmasıdır. Bunun olması için gerek ve yeter şart $1 - a > \overline{\alpha}_{X'}$ olmasıdır. Fakat (4.6) denkleminden $\overline{\alpha}_{X'} = 1 - \underline{\alpha}_X$ olur. Böylece Q_a operatörünün $\overline{X}$ üzerinde sınırlı olması için gerek ve yeter şart $a < \underline{\alpha}_X$ olmasıdır. ■

Şimdi, Banach fonksiyon uzaylarında maksimal operatörünün sınırlılığı ile ilgili teoremin ifade ve ispatını verelim.

Teorem 4.1.4 (Lorentz, Shimogaki) X, $\mathbb{R}^n$ üzerinde bir yeniden düzenleme altında değişmez kalan Banach fonksiyon uzayı olsun. Bu durumda M Hardy-Littlewood maksimal operatörünün X üzerinde sınırlı olması için gerek ve yeter şart X uzayının üst indeksi tarafından $\overline{\alpha}_X < 1$ koşulunun sağlanmasıdır (**Bennett ve Sharpley, 1988; Lerner ve Perez, 2007; Stein, 1993; Curbera, 2006**).

İspat. Teorem 4.1.1'den görüldüğü gibi X üzerinde M operatörünün sınırlı olması için gerek ve yeter şart $\overline{X}$ üzerinde P_1 operatörünün sınırlı olmasıdır. Theorem 4.1.3'den bunun ortaya çıkması için gerek ve yeter şart $\overline{\alpha}_X < 1$ olmasıdır. ■

4.2 Hilbert Dönüşümünün Banach Fonksiyon Uzaylarında Sınırlılığı

Bu kısımda Hilbert dönüşümünün Banach fonksiyon uzaylarındaki sınırlığı incelenmiştir. Öncelikle gerekli olan bazı tanım ve teoremler ispatsız olarak aşağıda verilmiştir.

Teorem 4.2.1 f, $\mathbb{R}$ üzerinde lokal integrallenebilir bir fonksiyon ve

$$S(f^*)(1) = \int_0^1 f^*(s)ds + \int_1^\infty f^*(s)\frac{ds}{s} < \infty \tag{4.18}$$

olduğunu kabul edelim. Bu durumda, bir c sabiti f fonksiyonu ve t parametresinden bağımsız olmak üzere

$$(\mathcal{H}f)^*(t) \leq cS(f^*)(t), \quad 0 < t < \infty \tag{4.19}$$

(**Bennett ve Sharpley, 1988**).

Teorem 4.2.2 Eğer f fonksiyonu (4.18) denklemini sağlıyorsa bu durumda h.h.y$-\mu$ için esas-değer integrali

$$(Hf)(x) = p.v.\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\frac{dt}{x-t}$$

mevcuttur. Ayrıca, c sabiti f fonksiyonu ve t parametresinden bağımsız olmak üzere

$$(Hf)^*(x) \leq cS(f^*)(t), \quad t > 0 \tag{4.20}$$

(**Bennett ve Sharpley, 1988**).

Önerme 4.2.3 Eğer $S(f^*)(1) < \infty$ ise bu durumda f ile denk ölçülebilir bir g fonksiyonu vardır öyle ki

$$S(f^*)(t) \leq 2\pi(Hg)^*(t), \quad t > 0 \tag{4.21}$$

(**Bennett ve Sharpley, 1988**).

Şimdi, Banach fonksiyon uzaylarında Hilbert dönüşümünün sınırlılığı ile ilgili teoremin ifade ve ispatını verelim.

Teorem 4.2.4 (Boyd) X, $\mathbb{R}$ üzerinde bir yeniden düzenleme altında değişmez kalan Banach fonksiyon uzayı olsun. O halde H Hilbert dönüşümünün X üzerinde sınırlı olması için gerek ve yeter şart

$$0 < \underline{\alpha}_X \leq \overline{\alpha}_X < 1$$

olmasıdır (**Boyd, 1967; Curbera, 2006**).

İspat. Eğer $0 < \underline{\alpha}_X \leq \overline{\alpha}_X < 1$ ise bu durumda Teorem 4.1.3'den P_1 ve Q_0 operatörleri $\overline{X}$ üzerinde sınırlıdır. Öyleyse, Teorem 4.2.2, H dönüşümünün X üzerinde sınırlı olduğunu gösterir. Tersi durumunda, eğer H dönüşümü X üzerinde sınırlı ise bu durumda Önerme 4.2.3'den gösterilir. Yani, $\forall f \in X$ için f ile denk-ölçülebilir bir g fonksiyonu vardır öyle ki

$$S(f^*) \leq 2(Hg)^*.$$

O halde, tüm $f \in X$ için

$$\begin{aligned} \|S(f^*)\|_{\overline{X}} &\leq 2\|(Hg)^*\|_{\overline{X}} \\ &= 2\|Hg\|_X \\ &\leq 2c\|g\|_X \\ &= 2c\|f^*\|_{\overline{X}}. \end{aligned} \tag{4.22}$$

$\overline{X}$ üzerinde S nin sınırlı olduğunu göstermek için (4.22) yeterlidir. Bu nedenle, $\overline{X}$ üzerinde P_1 ve Q_0 operatörleri de sınırlıdır. X uzayının indisleri

$$\overline{\alpha}_X < 1 \quad \text{ve} \quad \underline{\alpha}_X > 0$$

şartlarını sağladığından Teorem 4.1.3'den ispat tamamlanmış olur. ∎

KAYNAKLAR

[1] Alp, M. ; Musayev, B. *Fonksiyonel Analiz*, Balcı Yayınları, 2000.

[2] Bennett, C. ; Sharpley, R. *Interpolation of Operators*, Pure and Applied Mathematics Vol. 129, Academic Press, Boston, 1988.

[3] Boyd, D. W. *Indices of function spaces and their relationship to interpolation*, Canad. J. Math., **1969**, 21, 1245-1254.

[4] Boyd, D. W. *The Hilbert transform on rearrangement-invariant spaces*, Canad. J. Math., **1967**, 19, 599-616.

[5] Boyd, D. W. *A class of operators on the Lorentz spaces $M(\Phi)$*, Canad. J. Math., **1967**, 19, 839-841.

[6] Caldéron, A. P. ; Zygmund A. *On the existence of certain singular integrals*, Acta Math., **1952**, 88 (1), 85-139.

[7] Carro, M. ; Gogatishvili, A. ; Martín, J. ; Pick L. *Functional properties of rearrangement invariant spaces defined in term of oscillations*, J. Funct. Anal., **2005**, 229, 375-404.

[8] Cruz-Uribe, D. V. ; Martell, J. M. ; Pérez, C. *Weights, Extrapolation and the Theory of Rubio de Francia*, Operator Theory: Advances and Applications Vol. 215, Birkhäuser, 2011.

[9] Curbera, G P. ; Cuerva, J. G. ; Martell, J. M. ; Pérez, C. *Extrapolation with weights, rearrangement-invariant function spaces, modular inequalities and applications to singular integrals*, Adv. in Math., **2006**, 203, 256-318.

[10] Duoandikoetxea, J. *Fourier Analysis*, Graduate Studies in Math., Vol.29, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 2001.

[11] Grafakos, L. *Classical and Modern Fourier Analysis*, Pearson Education,Inc. Upper Saddle River, New Jersey, 2004.

[12] Guliyev, V. S. *Function spaces, integral operators and two weighted inequalities on homogeneous groups*, Some application, Baku, **2004**, 1-332.

[13] Guliyev, V. S. *Function spaces, integral operators and two weighted inequalities on homogeneous groups*, Doctor's degree dissertation, Moscow, Mat. Inst. Steklov **1994**, 1-329.

[14] Hardy, G. H. ; Littlewood J. E. *A maximal theorem with function theoretic applications*, Acta Math., **1930**, 54, 81-116.

[15] Hardy, G. H. ; Littlewood J. E. ; Polya, G. *Inequalities*, Cambridge: Cambridge Unicersity Press, 1952.

[16] Hazewinkel, M. (*ed.*), *Encyclopaedia of Mathematics*, Supplement Volume II, Springer, Netherlands, 2000.

[17] Hilbert, D. *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, Chelsea Pub. Co.,* **1953**, Supplement Volume II, Springer, Netherlands, 2000.

[18] Hujismans, C. B. ; Kaashoek, M. A. ; Luxemburg, W. A. J. ; de Pagter, B. *Operator Theory in Function Spaces and Banach Lattices*, Operator Theory Advances and Applications 75, 1995.

[19] Khvedelidze, B. V. *Hilbert transform*, Kluwer Academic Publishers, 2001.

[20] Köthe, G. *Topological vector spaces. Vol. I.*, Translated from the German by D. J. H. Garling. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 159 Springer-Verlag New York Inc., New York, **1969**, xv+456 pp.

[21] Lerner, A. K. ; Pérez, C. *A new characterization of the Muckenhoupt A_p weights through an extension of the Lorentz-Shimogaki theorem*, Indiana Univ. Math. J., **2007**, 56, no. 6, 2697-2722.

[22] Luxemburg, W. A. J. *Banach Function Spaces*, Thesis, Delft, 1955.

[23] Megan, M. ; Sasu, A. L. ; Sasu, B. *Banach Function Spaces and Exponential Instability of Evolution Families*, Archivum Mathematicum (BRNO), Tomus, **2003**, 39, 277-286.

[24] Musiełak, J. *Orlicz Spaces and Modular Spaces*, Springer-Verlag, Berlin, 1983.

[25] Pandey, J. N. *The Hilbert transform of Schwartz distributions and applications*, Wiley-Interscience, 1996.

[26] Pick, L. *A remark on continuous imbeddings between Banach function spaces*, Colloq. Math. Soc. János Bólyai, 58. Approximation Theory, Kécskemét (Hungary), **1990**, 571-581.

[27] Pick, L., Kufner, A. ; Oldrich, J. ; Fucík, S. *Function Spaces*, Walter de Gruyter publishing, 2012.

[28] Rana, I. K. *An introduction to measure and integration*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 45, Second Edition, Amer. Math. Soc., Providence, 2002.

[29] Rao, M. M. ; Ren Z. D. *Theory of Orlicz spaces*, M. Dekker, New York, 1991.

[30] Royden, H. L. *Real Analysis*, MacMillan, New York, 2nd ed., 1968.

[31] Rudin, W. *Functional Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1973.

[32] Sadosky, C. *Interpolation of operators and Singular integrals: An Introduction to Harmonic Analysis*, Marcel Dekker Inc., 1979.

[33] Schwartz, L. *Théorie des distributions*, Paris: Hermann, 1950.

[34] Stein, E. M. *Harmonic Analysis: Real Variable Methods, Orthogonality and Oscillatory Integrals*, Princeton Univ. Press, Princeton NJ, 1993.

[35] Stein, E. M. *Topic in Harmonic Analysis: Related to the Littlewood-Paley Theory*, Princeton Univ. Press, Princeton NJ, 1970.

[36] Torchinsky, A. *Real-variable methods in harmonic analysis*, Academic Press, New York, 1986.

[37] Talenti, G. *Inequalities in rearrangement-invariant function spaces*, Nonlinear Analysis, Function Spaces and Applications Vol. 5, Prometheus, Prague, **1995**, pp. 177-230.

[38] Zaanen, A. C. *Linear Analysis*, North-Holland, Amsterdam, 1960.

[39] Zaanen A. C. *Riesz Spaces. II*, North-Holland, Amsterdam, 1983.

[40] Zygmund A. *Trigonometric series*, 2nd ed., Cambridge University Press, 1968.

ÖZGEÇMİŞ

Adı ve Soyadı : Kasım Emre AKSOY

Doğum Yeri : Kadıköy / İSTANBUL

Doğum Tarihi : 24.08.1990

Yabancı Dili : İngilizce

İletişim Bilgileri

Adres : Ahi Evran Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü

E-mail : kasimemreaksoy@gmail.com

Eğitim Durumu

İlköğretim : Türker İnanoğlu İlköğretim Okulu, 1996-2004

Ortaöğretim : Nevzat Ayaz Anadolu Lisesi (YDA - Süper Lise), 2004-2008

Lisans : Ahi Evran Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, 2009-2014

Linneaus University, Department of Mathematics, Mathematics (ERASMUS Programme), 2012-2013