T.C.
AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

q-ANALİZ VE q-İNTEGRAL OPERATÖRLERİ

Kemal KURT

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

KIRŞEHİR 2017

T.C.
AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

q-ANALİZ VE q-İNTEGRAL OPERATÖRLERİ

Kemal KURT

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANA BİLİM DALI

Doç. Dr. Ali AKBULUT

KIRŞEHİR 2017

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü'ne

Bu çalışma jürimiz tarafından MATEMATİK Ana Bilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Başkan
Prof. Dr. Levent KULA

Üye
Doç. Dr. Ali AKBULUT

Üye
Doç. Dr. Necip ŞİMŞEK

Onay
Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

.../12/2017

Prof. Dr. Yılmaz ALTUN
Enstitü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum "q-Analiz ve q-İntegral Operatörleri" başlıklı çalışmamın, akademik kurallara ve etik değerlere uygun olarak yazıldığını, yararlandığım eserlerin kaynaklarda eksiksiz olarak gösterildiğini ve çalışmamın içinde kullanıldıkları her yerde bunlara atıf yapıldığını bildiririm.

Kemal KURT

ÖZET

q- Analiz ve q-İntegral Operatörleri

Yüksek Lisans Tezi

KEMAL KURT

Ahi Evran Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Aralık 2017

Bu yüksek lisans tezinde, q-analiz, Hardy tipli eşitsizliklerin q-analogları, q-integral operatörleri ve bazı uygulamaları incelenmiştir.
Bu tez çalışması dört bölümden oluşmaktadır.
Birinci bölüm giriş kısmıdır.
İkinci bölümde, q-analizin bazı temel tanım ve kavramlarına yer verilmiştir.
Üçüncü bölümde, Hardy tipli eşitsizliklerin q-analogları incelenmiştir.
Son bölümde, q-integral operatorleri ve bazı uygulamalarında ise q-Riemann-Liouville operatörü ve q-Kesirli integral operatörü ile ilgili sonuçlara yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler	:	q-Türev, q-İntegral, q-Riemann-Liouville operatörü, q-Kesirli integral operatörü
Tez Yöneticileri	:	Doç. Dr. Ali AKBULUT
Sayfa Adedi	:	**67**

ABSTRACT

q-Analysis and q-Integral Operators

Master Thesis

KEMAL KURT

Ahi Evran University
Institute of Science
December 2017

In this master's thesis, q -analysis, Hardy-type inequalities q -analogues, q -integral operators and some applications are analyzed.
This thesis consists of four parts.
It starts with the introduction part.
In the second part, some basic definitions and concepts are given on the q -analysis.
In the third chapter, q -analogs of Hardy typed inequalities are examined.
In the last part, q -integral operators and some applications are given on the subject of q -Riemann-Liouville operator and the results related to the integral operator.

Keywords	:	q-Derivative, q-Integral, q-Riemann-Liouville operator, q-Fractional integral operator
Supervisors	:	Assoc. Prof. Dr. Ali AKBULUT
Number of Pages	:	**67**

TEŞEKKÜR

Bu yüksek lisans tezini hazırlarken, her ihtiyaç duyduğumda zengin ve engin bilgileriyle bana yol gösteren, beni motive edici tarzı ve tüm içtenliği ile destekleyen tez danışmanım kıymetli ve saygıdeğer Doç. Dr. Ali AKBULUT'a teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca bana destek veren, matematik bilim dünyası tarafından tanınan bilim insanı Sayın Prof. Dr. Vagif S. GULİYEV'e ve her zaman yol gösterici tavrıyla yanımda olan Öğr. Gör. Süleyman Çelik'e de teşekkür ederim.

Yine tez çalışması boyunca zaman bakımından ihmal ettiğim sevgili eşim Ayşen KURT Hanımefendi'ye teşekkürlerimi sunarım.

Kemal KURT

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

SİMGELER VE KISALTMALAR

$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$	: q-**Binom katsayılarının analogu**
e_p^x	: q-**Üstel fonksiyonun q-analogu**
E_q^x	: q-**Üstel fonksiyonun q-analogu**
$[\lambda]_q$	: q-**reel sayı**
$(D_{q,x}f)(x,\ y)$	: q-**differensiyel operator**
$(D_qf)(x)$	: q-**türev**
$\Gamma(n)$	: **Gamma fonksiyonu**
$B(n,s)$	: **Beta fonsiyonu**
Γ_q	: q-**Gamma fonksiyonu**
$B_q(\alpha,\ \beta)$	: q-**Beta fonksiyonu**
$I_\alpha^{\gamma,\beta}f(x)$	: **Genelleştirilmiş kesirli integral operatörü**
$I_\alpha f(x)$	: **Riemann-Liouville kesirli integral operatörü**
$I_{q,\alpha}f(x)$	: **Riemann-Liouville tipli kesirli integral operatörünün** q-**analogu**

1 GİRİŞ

q-analiz 1740'lı yıllarda ilk olarak çalışılmaya başlanmıştır. Daha sonraki yıllarda Euler, analitik sayı teorisi olarak da bilinen bölüm teorisini başlatmıştır. Euler tarafından yazılan Latince eserler 1800'lü yılların başında Jakobi başlığı altında yayınlanmış olup 1829 yılında Jacobi (Gaus-Jacobi) tarafından verilen teta ve eliptik fonksiyonlar genel olarak q-analize eşdeğerdir.

Son yıllarda kuantum hesabı (q-calculus) aktif olarak geliştirildi. Birçok sürekli bilimsel problem, q-calculus adını kullanarak onun fark versiyonlarına sahiptir. q-calculus, kombinasyonlarda, özel fonksiyonlarda, fraktallarda, dinamik sistemlerde, sayılar teorisinde, hesaplama yöntemlerinde, kuantum mekaniğinde, bilgisayar teknolojisinde ve birçok bilimsel alanda uygulaması mevcuttur [2, 11, 10, 12, 17].

Şimdiye kadar, klasik analizden elde edilen birçok eşitsizliklerin q-analogları hesaplanmış olup ancak Hardy-tipli q-eşitsizlikleri son yıllarda incelenmeye başlanmıştır [14, 21, 18, 26, 27]. Hardy eşitsizliği ve çeşitli genelleştirmeleri klasik analizde önemli bir rol oynamaktadır. Bu nedenle, son elli yıl boyunca birçok uzayda Hardy ve Hardy tipi eşitsizlikleri ile ilgili bilimsel makaler yayınlanmıştır [19, 20]. Şimdiye kadar klasik analizden elde edilen birçok eşitsizliklerin q-analogları hesaplanmış olup ancak Hardy tipli q-eşitsizlikleri yeni bir araştırma konusu olmuştur [14, 21, 18, 26, 27].

1910 yılında F.H. Jackson, q-türevini ve q-integralini tanımladı [16]. Bu, q-analizinin başlangıcı oldu. Son yıllarda q-analize ilgi oldukça artmaya başlamıştır. q-analiz, bilgisayar bilimleri, kuantum mekaniği ve kuantum fiziği gibi bazı uygulamalı alanlarda bilimsel problemler için ve matematiğin çeşitli alanlarında, örneğin dinamik sistemler, sayı teorisi, kombinasyon, özel fonksiyonlar, fraktallar ve sayısız birçok uygulama alanına sahiptir [1, 8, 10, 11, 12]. q-analizde integral eşitsizlikleri ile ilgili ilk sonuçlar 2004 yılında Gauchman [14] tarafından ispatlanmış olup daha sonra bazı klasik eşitsizliklerinin q-analogları ispatlanmıştır [18, 21, 26, 27].

2014 yılında Maligranda [20] tarafından klasik Hardy eşitsizliğinin q-analogunu ispatlayarak Hardy'nin 1925'teki orijinal eşitsizliğinin daha da geliştirilmesi büyük oranda sağlanmıştır [19, 20]. Dolayısıyla, Hardy tipli eşitsizliklerinin hangilerinin q-analoglarına sahip olduklarını araştırmak yeni bir araştırma alanı gibi görünüyor.

Persson ve Shaimardan [24] $n \in \mathbb{N}$ de Riemann-Liouville kesirli integral operatörü için bazı Hardy tipli eşitsizliklerin q-analogunu ve negatif olmayan reel sayılarda bu eşitsizliklerin gerçeklendiği gerek ve yeter koşulları bulmuşlardır.

Bu yüksek lisans tezinde, q-analiz, Hardy tipli eşitsizliklerin q-analogları, q-integral operatörleri ve bazı uygulamaları incelenmiştir. Bu tez çalışması dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmıdır. İkinci bölümde, q-analizin bazı temel tanım ve kavramlarına yer verilmiştir. Üçüncü bölümde, Hardy tipli eşitsizliklerin q-analogları incelenmiştir. Son bölümde, q-integral operatörleri ve bazı uygulamalarında ise q-Riemann-Liouville operatörü ve q-Kesirli integral operatörü ile ilgili sonuçlara yer verilmiştir.

2 q-ANALİZ

Bu bölümde q-analizdeki bazı önemli tanım ve natosyonlara ve klasik analizdeki bazı tanım ve teoremlerin q-analoglarına kısaca yer verilmiştir.

2.1 q-Analizde Temel Kavramlar

Tanım 2.1.1 $q > 0$ ve $n \in \mathbb{N}$ olsun.

$$[n]_q := \begin{cases} \frac{1-q^n}{1-q}, & q \neq 1, \\ n & , q = 1 \end{cases} \tag{2.1}$$

şeklinde tanımlanan $[n]_q$ eşitliğine q-tamsayısı denir.

Ayrıca $\lambda \in \mathbb{R}$ ise $[\lambda]_q$ ifadesine q-reel sayı denir [5].

Tanım 2.1.2 $q > 0$ ve $n \in \mathbb{N}$ olsun. q-faktöriyeli,

$$[n]_q! := \begin{cases} [n]_q[n-1]_q \cdots [1]_q, & n = 1, 2, \ldots, \\ 1 & , n = 0 \end{cases} \tag{2.2}$$

şeklinde tanımlanır [5].

Tanım 2.1.3 $n, k \in \mathbb{N}$ olsun.q-binom katsayıları,

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{[n]_q!}{[k]_q![n-k]_q!}, \qquad 0 \leq k \leq n \tag{2.3}$$

şeklinde tanımlanır [5].

q-binom katsayısı aşağıdaki eşitlikleri sağlar;

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q + q^k \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q, \tag{2.4}$$

ve

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = q^{n-k} \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q + \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q \tag{2.5}$$

.

a reel bir sayı, n doğal sayı olmak üzere faktöriyellerin q-analogları aşağıdaki gibi tanımlanır [5]:

Tanım 2.1.4

$$[a]_q \equiv \frac{1-q^a}{1-q}, \qquad q \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\}, \tag{2.6}$$

$$[2n-1]_q!! \equiv \prod_{k=1}^{n} [2k-1]_q, \; q \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\}, \tag{2.7}$$

$$[2n]_q!! \equiv \prod_{k=1}^{n} [2k]_q, \; q \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\} \tag{2.8}$$

$$[-a]_q = -q^{-\alpha}[a]_q \tag{2.9}$$

$$[a]_{\frac{1}{q}} = q^{-a+1}[a]_q. \tag{2.10}$$

Tezde sık kulanılacak Pochhammer sembolünün (q-shifted faktöriyel) q-analogu

$$(a;q)_0 = 1 \tag{2.11}$$

$$(a;q)_n = \prod_{m=0}^{n-1} (1-aq^m) \tag{2.12}$$

$$(a;q)_\infty = \prod_{m=0}^{\infty} (1-aq^m) \tag{2.13}$$

$$(a;q)_\alpha = \frac{(a;q)_\infty}{(aq^\alpha;q)_\infty} \tag{2.14}$$

[11].

Tanım 2.1.5 Polinomların q-analogları aşağıdaki gibi ifade edilir;

$$(1+x)_q^n := \begin{cases} (1+x)(1+qx)\cdots(1+q^{n-1}x), & n=1,2,\ldots, \\ 1 & , n=0, \end{cases} \tag{2.15}$$

$$(x-a)_q^n := \begin{cases} 1 & , n=0, \\ (x-a)(x-qa)\cdots(x-q^{n-1}a) & , n \in N, \end{cases} \tag{2.16}$$

ve

$$(x-a)_q^{n+m} = (x-a)_q^m (x-q^m a)_q^n, \qquad n,m = 0,1,2,\cdots. \tag{2.17}$$

Ayrıca, $x \geq t > 0$ ise bu durumda $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$' daki $(x-t)^k$ polinomunun ve $\alpha \in \mathbb{R}$' daki $(x-t)^\alpha$ genelleştirilmiş polinomun q-analogu sırasıyla

$$(x-t)_q^k = x^k(\frac{t}{x};q)_k \tag{2.18}$$

ve

$$(x-t)_q^\alpha = x^\alpha(\frac{t}{x};q)_\alpha \tag{2.19}$$

olarak tanımlanır [11].

Tanım 2.1.6 Gauss binom formülü;

$$(x+a)_q^n = \sum_{j=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_q q^{j(j-1)\backslash 2} a^j x^{n-j}. \tag{2.20}$$

Teorem 2.1.7 Ω kompleks düzlemde bir bölge olsun ve Ω' da holomorfik fonksiyonlar $\mathbf{H}(\Omega)$ ile tanımlansın. $f_n \in \mathbf{H}(\Omega)$, $n = 1,2,3,...,n_0$ olmak üzere f_n, Ω' nın herhangi bir birleşeninde de aynı 0 dır ve

$$\sum_{n=1}^{\infty} |1 - f_n(z)| \tag{2.21}$$

serisi Ω' nın kompakt alt kümeleri üzerinde düzgün yakınsak olsun. Bu durumda

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} f(z) \tag{2.22}$$

sonsuz çarpanı Ω' nın kompakt alt kümeleri üzerinde düzgün yakınsaktır. Böylece, $f \in \mathbf{H}$ [11].

Tanım 2.1.8 Aşağıdaki fonksiyonların tümü holomorfiktir:

$$\langle a;q\rangle_\infty = \prod_{m=0}^{\infty}\left(1-q^{a+m}\right), \qquad 0<|q|<1, \tag{2.23}$$

$$(a;q)_\infty = \prod_{m=0}^{\infty}\left(1-aq^{m}\right), \qquad 0<|q|<1 \tag{2.24}$$

[11].

Uyarı 2.1.9 a, (2.23) eşitliğinde negatif bir tamsayı ise sonuç sıfır olacaktır ve bundan dolayı sonsuz çarpanlarda bu durum gerçekleştiğinde dikkat edilmelidir. Bazen pay ve payda da iki durum gerçekleştiği zaman bir limit durumu söz konusudur.

$0<|q|<1$ durumunda $\langle a;q\rangle_\infty$ ya da $(a;q)_\infty$ formüllerinden biri gerçeklenir, Fakat

$$q^a \neq 0,\ \ |q| \geq 1$$

olması durumunda ise (2.23) eşitliği ıraksaktır [11].

Teorem 2.1.10 $0<|q|<1$ için aşağıdaki formüller doğrudur:

$$\langle a;q\rangle_n = \frac{\langle a;q\rangle_\infty}{\{a+n;q\}_\infty}, \tag{2.25}$$

$$(aq^{-n};q)_n \equiv \frac{1}{(a;q)_{-n}} = \frac{(aq^{-n};q)_\infty}{(a;q)_\infty} \tag{2.26}$$

[11].

İspat. İspat tanımdan açıktır. ■

Tanım 2.1.11 $(a-b)^k$ kuvvetinin q-analogu

$$(a-b)_q^0 = 1,\ \ k\in\mathbb{N},$$

$$(a-b)_q^k = \prod_{i=0}^{k-1}\left(a-q^ib\right),\ \ \forall a,\ b\in\mathbb{R},$$

ve

$$(1-b)_q^\alpha \ := \frac{(1-b)_q^\infty}{(1-q^\alpha b)_q^\infty} \qquad \forall \ b, \ \alpha \in \mathbb{R} \tag{2.27}$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca

$$(1-b)_q^\alpha = \frac{1}{(1-q^\alpha b)_q^{-\alpha}}, \qquad \forall \ b, \ \alpha \in \mathbb{R} \tag{2.28}$$

şeklinde ifade edilir [11].

Tanım 2.1.12 Klasik analizde, $|z| < 1$ ve $\forall a, b, c \in \mathbb{C}$ için hipergeometrik fonksiyonu (Gaussian Fonksiyonu)

$$(a)_0 = 1, \ (a)_n = a(a+1)\cdots(a+n-1) \ , \ n > 0$$

şeklinde tanımlanan $(a)_n$ Pochhammer sembolü olmak üzere kuvvet serileri tarafından

$${}_2F_1(a,b;c;z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!}$$

olacak şekilde tanımlanır.

B, Beta fonksiyonu ise bu durumda $Re(c) > Re(b) > 0$ olmak üzere hipergeometrik fonksiyon

$${}_2F_1(a-1,b;c;z) = \frac{1}{B(b,c-b)} \int_0^1 x^{b-1}(1-x)^{c-b-1}(1-zx)^{2-a}dx$$

dır.

$b = c$ olduğunda ise

$${}_2F_1(a-1,b;b;z) = (1-z)^{a-1}$$

dır [11].

Tanım 2.1.13 q-hipergeometrik fonksiyon

$$
{}_2\phi_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix}\middle| q; x\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a;q)_n (b;q)_n}{(c;q)_n (q;q)_n} x^n \tag{2.29}
$$

şeklinde tanımlanır [17].

Şimdi, q-hipergeometrik fonksiyonları ile hesaplanması için bazı basit temel özellikleri verelim.

Teorem 2.1.14 $q \neq 0$ ve $q \neq e^{2\pi i t}, t \in \mathbb{Q}$ için aşağıdaki formüller gerçeklenir;

$$
\langle -a+1-n; q\rangle_n = \langle a; q\rangle_n (-1)^n q^{-\binom{n}{2}-na}, \tag{2.30}
$$

$$
\{a; q\}_{n-k} = \frac{\{a; q\}_n}{\langle -a+1-n; q\rangle_k} (-1)^{k_q\binom{k}{2}+k(1-a-n)}, \tag{2.31}
$$

$$
\langle a+k; q\rangle_{n-k} = \frac{\langle a; q\rangle_n}{\{a; q\}_k}, \tag{2.32}
$$

$$
\{a+n1; q\}_{k_1} = \frac{\{a; q\}_{k_2} \{a+k_2; q\}_n 2}{\langle a; q\rangle_{n_1}},\ n1+k_1 = n2+k_2, \tag{2.33}
$$

$$
\langle a+2k; q\rangle_{n-k} = \frac{\langle a; q\rangle_n \langle a+n; q\rangle_k}{\{a; q\}_{2k}}, \tag{2.34}
$$

$$
\langle a; q\rangle_m \langle a-n; q\rangle_{2n} = \langle a; q\rangle_n \langle a-n; q\rangle_m \langle a+m-n; q\rangle_n, \tag{2.35}
$$

$$
\langle -n; q\rangle_k = \frac{\{1; q\}_n}{\{1; q\}_{n-k}} (-1)^{k_q\binom{k}{2}-nk}, \tag{2.36}
$$

$$
\{a-n; q\}_k = \frac{\{a; q\}_k \{1-a; q\}_n}{\langle -a+1-k; q\rangle_n q^{nk}}, \tag{2.37}
$$

$$
\frac{\langle a; q\rangle_n \langle 1-a; q\rangle_k}{\{1-a-n; q\}_k \{a-k; q\}_n} = q^{nk}, \tag{2.38}
$$

$$
\frac{\{1-b; q\}_{k+m} \{a-k; q\}_k}{\langle 1-b+k; q\rangle_m \langle 1-a; q\rangle_k \langle b-k; q\rangle_k} = q^{k(a-b)}, \tag{2.39}
$$

$$
\{a; \frac{1}{q}\}_n = \{a; q\}_n (-1)^n q^{-\binom{n}{2}-na} \tag{2.40}
$$

[11].

İspat. (2.30) nin ispatı:

$$LHS = (1 - q^{-a+1-n})(1 - q^{-a+2-n}) \cdots (1 - q^{-a}),$$

$$RHS = (1 - q^{a})(1 - q^{a+1}) \cdots (1 - q^{a+n-1})(-1)^n q^{-na-(0+1+2+\cdots+(n-1))}$$

$$= (1 - q^{-a})(q - q^{-a}) \cdots (q^{n-1} - q^{-a})q^{-((n))}$$

$$= (1 - q^{-a})(1 - q^{-a-1}) \cdots (1 - q^{-a-n+1}) = \text{LHS}.$$

(2.31)' nin ispatı:

$n > k$ için

$$LHS = (1 - q^{a})(1 - q^{a+1}) \cdots (1 - q^{a+n-k-1}),$$

$$RHS = \frac{(1 - q^{a})(1 - q^{a+1}) \cdots (1 - q^{a+n-1})(-1)^k q^{k(1-a)+0+1+2+\cdots+(k-1)}}{(1 - q)(1 - q) \cdot (1 - q)q^{nk}}$$

$$= \frac{(1 - q^{a})(1 - q^{a+1}) \cdots (.1. - q^{a+n-1})}{(1 - q^{a+n-1})(1 - q^{a+n-2}) \cdot (1 - q^{a+n-k})} = LHS.$$

$n < k$ için

$$LHS = ((1 - q^{a+n-k})(1 - q^{a+n-k+1}) \cdots (1 - q^{a-1}))^{-1} = \text{RHS}.$$

(2.33) ve (2.34) ifadelerinin ispatı, (2.12) tanımından ve (2.36) ifadesinden aşağıdaki gibi kolayca ispatlanır;

$$LHS = (1-q^{-n})(1-q^{-n+1})\cdots(1-q^{-n+k-1}),$$

$$RHS = \frac{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)(-1)^k q^{0+1+2+\cdots+(k-1)}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^{n-k})q^{nk}}$$

$$= \frac{(1-q^{n-k+1})(1-q^{n-k+2})\cdots(1-q^n)(-1)^k q^{0+1+2+\cdots+(k-1)}}{q^{nk}}$$

$$= (q^{-k+1}-q^{-n})(q^{-k+2}-q^{-n})\cdots(1-q^{-n})q^{0+1+2+\cdots+(k)}$$

$$= (1-q^{k-n-1})(1-q^{k-n-2})\cdots(1-q^{-n}) = \text{LHS}.$$

(2.37) ispatı:

$$LHS = (1-q^{a-n})(1-q^{a-n+1})\cdots(1-q^{a-n+k-1}),$$

$$RHS = \frac{(1-q^a)(1-q^{a+1})\cdots(1-q^{a+k-1})(1-q^{1-a})(1-q^{2-a})\cdots(1-q^{n-a})}{(1-q^{-a+1-k})(1-q^{-a+2-k})\cdots(1-q^{n-a-k})q^{nk}}$$

$$= \frac{(1-q^a)(1-q^{a+1})\cdots(1-q^{a+k-1})(q^{1-a}-.1)(q^{2-a}-1)\cdots(q^{n-a}-1)}{(q^{-a+1}-q^k)(q^{-a+2}-q^k)\cdot\cdot(q^{n-a}-q^k)}$$

$$= \frac{(1-q^a)(1-q^{a+1})\cdots(1-q^{a+k-1})(1-q^{a-1})(q-q^{a-1})\cdots(q^{n-1}-q^{a-1})}{(1-q^{a+k-1})(q-q^{a+k-1})\cdots(q^{n-1}-q^{a+k-1})}$$

$$= \frac{(1-q^a)(1-q^{a+1})\cdots(1-q^{a+k-1})(1-q^{a-1})(1-q^{a-2})\cdots(1-q^{a-n})}{(1-q^{a+k-1})(1-q^{a+k-2})\cdots(1-q^{a+k-n})}$$
$$= LHS.$$

■

Tanım 2.1.15 **(Hölder-Rogers eşitsizliği)** $p, q > 1$ için $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. $|g(x)| =$

$c|f(x)|^{p-1}$ eşitliği olmak üzere integral için Hölder eşitsizliği

$$\int_a^b |f(x)g(x)|dx \leq \Big|\int_a^b |f(x)|^p dx\Big|^{1\backslash p}\Big|\int_a^b |g(x)|^q dx\Big|^{1\backslash q} \tag{2.41}$$

şeklinde tanımlanır. $p = q = 2$ seçilirse bu eşitsizliğe, Schwarz eşitsizliği denir.

Benzer şekilde $|b_k| = c|a_k|^{p-1}$ olmak üzere seriler için Hölder eşitsizliği

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| \leq \Big(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\Big)^{1\backslash p}\Big(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^q\Big)^{1\backslash q} \tag{2.42}$$

şeklinde ifade edilir. $p = q = 2$ seçilirse bu eşitsizliğe, Cauchy eşitsizliği denir [15].

2.2 q-Türevi

Klasik analizde f fonksiyonunun türevi

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} \tag{2.43}$$

şeklinde tanımlanır. Eğer $x_0 = qx$ seçilirse f fonksiyonunun türevi mevcut değildir. Matematik bilim dünyasında bu türevin tanımlı olması için q -türev tanımına gerek duyulmuştur. q-türev tanımının farklı versiyonları Euler ve Heine tarafından tanımlandı. Ancak q-türevi tam olarak Jackson tarafından 1908'de tanımlanmıştır.

q-analizde türev ve integraller klasik anlamdakilere benzer şekilde bir q reel parametresine bağlı olarak tanımlanmaktadır. Ancak limit olarak $q \to 1$'e yaklaşımında klasik anlamdaki sonuçlar elde edilmektedir.

Örneğin;

$$[\lambda]_q := \frac{1 - q^\lambda}{1 - q}, \qquad 0 < q < 1, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

olduğundan

$$\lim_{q \to 1} \frac{1 - q^\lambda}{1 - q} = \lambda$$

olur.

Tanım 2.2.1 (**q- diferensiyel**) f sürekli reel bir fonksiyonun q-diferensiyeli

$$Dqf(x) := f(qx) - f(x)$$

şeklinde tanımlanır [11].

Tanım 2.2.2 (*q*-**türev**) f sürekli reel bir fonksiyon olsun. f fonksiyonunun q-türevi

$$(D_q f)(x) \equiv \begin{cases} \frac{f(x)-f(qx)}{(1-q)x}, & q \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\},\ x \neq 0 \text{ ise}, \\ \\ \frac{df}{dx}(x), & q\text{=1 ise}, \\ \\ \frac{df}{dx}(0), & \text{x=0 ise} \end{cases} \tag{2.44}$$

şeklinde tanımlanır.

q-diferensiyel operatörü değişken ile ifade edilmesi istenirse

$$(\mathrm{D}_{q,x} f)(x,\ y)$$

şeklinde yazılır.

f fonksiyonu x değişkenine göre diferensiyellebilirse

$$\begin{aligned} \lim_{q \to 1} (\mathrm{D}_q f)(x) &= \lim_{q \to 1} \frac{f(x) - f(qx)}{(1-q)x} \\ &= \frac{df}{dx} \end{aligned} \tag{2.45}$$

[11].

Örnek 2.2.3 $f(x) = \alpha x^n$, $n \in \mathbb{Z}^+$ olsun.

$$\begin{aligned} \mathrm{D}_q(\alpha x^n) &= \frac{\alpha(qx^n) - \alpha x^n}{(q-1)x} \\ &= \alpha \frac{q^n - 1}{q - 1} x^{n-1} \end{aligned}$$

$[n]_q := \frac{q^n - 1}{q-1}$ şeklinde seçilirse böylece

$$\mathrm{D}_q(\alpha x^n) = \alpha [n]_q x^{n-1}$$

elde edilir.

Örnek 2.2.4

$$\mathrm{D}_q(x^\alpha) = \frac{x^\alpha - (qx)^\alpha}{(1-q)x}$$

$$= \frac{x^\alpha(1-q^\alpha)}{x(1-q)}$$

$$= [\alpha]_q\, x^{\alpha-1}, \ \ \alpha \in \mathbb{R}.$$

Örnek 2.2.5

$$\mathrm{D}_q \log x = \frac{\log q}{q-1}\frac{1}{x}, \qquad 0<q<1, \qquad x>0$$

q-türevinin bazı özellikleri ispatsız olarak aşağıdaki lemma ile verilmiştir:

Lemma 2.2.6 f ve g sürekli reel fonksiyonlar olsun.

$$\mathrm{D}_q(f(x)+g(x)) = \mathrm{D}_q f(x) + \mathrm{D}_q g(x) \tag{2.46}$$

$$\mathrm{D}_q(f(x)g(x)) = \mathrm{D}_q f(x)g(x) + f(qx)\mathrm{D}_q g(x) \tag{2.47}$$

$$\mathrm{D}_q(f(x)g(x)) = \mathrm{D}_q f(x)g(qx) + f(x)\mathrm{D}_q g(x) \tag{2.48}$$

$$\mathrm{D}_q\Big(\frac{f(x)}{g(x)}\Big) = \frac{g(x)\mathrm{D}_q f(x) - f(x)\mathrm{D}_q g(x)}{g(qx)g(x)}, \ \ g(qx)g(x) \neq 0. \tag{2.49}$$

Klasik analizden bilinen Taylor formülünü (2.44) ifadesinin sağ tarafına uygulanırsa

$$\mathrm{D}_q(f(x)) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(q-1)^k}{(k+1)!} x^k f^{(k+1)}(x) \tag{2.50}$$

q-differensiyel operatörü elde edilir. Böylece f fonksiyonu analitiktir [11].

Lemma 2.2.7 (q-türevi için Zincir Kuralı) g fonksiyonu $g(x) \neq 0$ ve $g(qx) \neq g(x)$ özelliklerine sahip olsun. Bu durumda

$$\mathrm{D}_q(fog)(x) = (\mathrm{D}_{\frac{g(qx)}{g(x)}}(f))(g(x)) \times \mathrm{D}_q(g)(x) \tag{2.51}$$

[11].

Lemma 2.2.8 D_q bir lineer operatördür. Yani a ve b sabitleri için

$$\begin{aligned} D_q(af(x) + bg(x)) &= \frac{af(qx) + bg(qx) - af(x) - bg(x)}{(q-1)x} \\ &= aDqf(x) + bDqg(x) \end{aligned}$$

[5].

Tanım 2.2.9 q-türev operatörü için Leibniz kuralı

$$D_q^{(n)}(fg)(x) := \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_q D_q^{(k)} f(xq^{n-k}) D_q^{(n-k)} g(x)$$

[5].

Önerme 2.2.10 $n \geq 0$ için

$$D_q(1+x)_q^n = [n]_q(1+qx)_q^{n-1}$$

$$D_q\left\{\frac{1}{(1+x)_q^n}\right\} = -\frac{[n]_q}{(1+x)_q^{n+1}}$$

[5].

İspat. q-türevin tanımına göre,

$$\begin{aligned} D_q(1+x)_q^n &= \frac{(1+qx)_q^n - (1+x)_q^n}{(q-1)x} \\ &= (1+qx)_q^{n-1} \frac{\{(1+q^n x - (1+x)\})}{(q-1)x} \\ &= [n]_q(1+qx)_q^{n-1} \end{aligned}$$

bulunur. (2.49) ifadesinden

$$
\begin{aligned}
D_q\left\{\frac{1}{(1+x)_q^n}\right\} &= -\frac{D_q(1+x)_q^n}{(1+qx)_q^n(1+x)_q^n} \\
&= -\frac{[n]_q}{(1+q^nx)(1+x)_q^n} \\
&= -\frac{[n]_q}{(1+x)_q^{n+1}}
\end{aligned}
$$

elde edilir. ■

2.3 q-Antitürev

Klasik analizde olduğu gibi, q-türev de bir q-antitüreve sahiptir.

Tanım 2.3.1 (q-antitürevi) $D_qF(x) = f(x)$ ise F fonksiyonuna f'in bir q-antitürevi denir ve

$$F(x) := \int f(x)d_qx$$

şeklinde ifade edilir [23].

Klasik analizde olduğu gibi herhangi bir fonksiyonun birden fazla q-antitüreve sahip olması mümkündür. Dolayısıyla, F fonksiyonu q-antitürevden daha çok bir q-antitürev gibi tanımlanır.

Her ne kadar bir fonksiyonun q-antiürevi tek olmasa da, $q \in (0,1)$' deki bir fonksiyona bir sabit eklenerek $x = 0$' da sürekli bir q-antitürev olduğu ispatlanabilir.

Teorem 2.3.2 Eğer $0 < q < 1$ ise , bu durumda, bir sabit eklenerek,herhangi bir f fonsiyonu $x = 0$ 'da sürekli en fazla bir q-antitüreve sahiptir [23].

İspat. Kabul edelim ki F_1 ve F_2 f fonksiyonunun $x = 0$ da sürekli iki q-antitürevi ve $\Phi(x) = F_1(x) - F_2(x)$ olsun. Belirtelim ki Φ fonksiyonu $x = 0$ 'da sürekli ve $\Phi(qx) = \Phi(x)$ 'dır. Çünkü $dq\Phi(x) = 0$ 'dır.

Φ fonksiyonu $x = 0$ da sürekli olduğundan $\forall\epsilon > 0, \exists\delta > 0$ öyle ki $\forall x \in [0,\delta]$, $\Phi(x) \in [\Phi(0) - \epsilon, \Phi(0) + \epsilon]$.

Bazı $N > 0$ için $qN < \delta$ ve $\Phi(qx) = \Phi(x) \to \Phi(q^N x) = \Phi(x)$ olduğundan $\Phi(x)$, $\Phi(0)$ keyfi yakınsak olup $\Phi(x) = \Phi(0)$.

■

2.4 Jackson İntegrali ve Özellikleri

f fonksiyonun q-antitürevi bir F fonksiyonu yani $D_qF(x) = f(x)$ olduğu bilinmektedir. Henüz q-antitürevi ile iligili bu konuda tam olarak bir hesaplama vermedik. O halde F fonksiyonunun q- antitürev ve f fonksiyonu arasındaki bağıntıyı bu kısımda verelim.

$\hat{M}_q(F(x)) := F(qx)$ olacak şekilde $\hat{M}_q$ operatörü tanımlayalım. Şimdi D_q 'nun tanımında yani $D_qF = f$ ifadesinde $(1-\hat{M}_q)$ ve $\dfrac{1}{(q-1)x}$ operatörleri gözönüne alınırsa

$$\frac{1}{(q-1)x}(\hat{M}_q - 1)F(x) = f(x)$$

elde edilir.

Böylece

$$\begin{aligned} F(x) = & \ \frac{1}{1-\hat{M}_q}((1-q)xf(x)) \\ = & \ (1-q)\sum_{n=0}^{\infty} \hat{M}_q^n(xf(x)) \\ = & \ (1-q)\sum_{n=0}^{\infty} q^n f(q^n x) \end{aligned} \tag{2.52}$$

olduğu görülür. Buna f fonksiyonunun **Jackson integral**'i denir [23].

Şimdi Jackson integral ile iligili bazı temel özellikleri aşağıda verelim.

2.4.1 Yakınsaklık

Reel değerli bir F fonksiyonu (2.52) integraline göre yakınsak değildir fakat q-antitürevi mevcuttur. Şimdi aşağıdaki teorem ile bazı f fonksiyonları için bir q-antitürevinin Jackson integral yakınsaklığını verelim.

Teorem 2.4.1 $0 < q < 1$ olsun. Bazı $0 \leq \alpha < 1$ için $|f(x)x^{\alpha}|$, $(0,\ A]$ üzerinde sınırlı ise bu durumda bir f fonksiyonun q-antitürevinin $(0,\ A]$ üzerindeki bir F fonksiyonuna (2.52) tanımına göre yakınsaklığı Jackson integralidir. Ayrıca $x = 0$' da $F(0) = 0$ olmak üzere F fonksiyonu süreklidir [23].

İspat. Kabul edelim ki $(0,\ A]$ üzerinde herhangi bir $x \in (0,\ A]$ için $|f(x)x^{\alpha}| < M$. $\forall n \geq 0$,

$$|f(q^n x)| < M(q^n x)^{-cx} \tag{2.53}$$

(2.53) ifadesinin her iki tarafı q^n ile çarpılırsa,

$$|q^n f(q^n x)| \ < Mq^n(q^n x)^{-\alpha}$$

olup $1 - \alpha > 0$ ve $0 < q < 1$ olmak üzere

$$\begin{aligned} |\sum_{n=0}^{\infty} q^n f(q^n)x| \ &< \ \sum_{n=0}^{\infty} Mx^{-\alpha}(q^{1-\alpha})^n \\ &= \frac{Mx^{-\alpha}}{1 - q^{1-\alpha}} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece bu toplam, yakınsak bir geometrik seri olduğundan Jackson integralidir. Yani bu toplam bir F fonksiyonuna yakınsar.

$F(0) = 0$ olduğu açıktır. F fonksiyonunun $x = 0$ noktasında sürekli olduğunu ispatlamak için

$$|(1-q)x\sum_{n=0}^{\infty} q^n f(q^n x)| \ < \ \frac{M(1-q)x^{1-\alpha}}{1 - q^{1-\alpha}}, \qquad 0 < x \leq A$$

ifadesinde $1 - q > 0$ olduğundan

$$\lim_{x \to 0} F(x) = \lim_{x \to 0} \frac{M(1-q)x^{1-\alpha}}{1-q^{1-\alpha}} = 0$$

olur. ■

2.4.2 Teklik

Daha önce gösterildiği gibi q-antitürevin Jackson intagrali $x = 0$ noktasında süreklidir. Yani F fonksiyonu tektir [23].

2.4.3 Varlık

Teorem 2.4.2 (2.52) ifadesi ile tanımlanan Jackson integrali f fonksiyonunun bir q- antitürevini verir [23].

İspat. (2.52) ifadesi ile tanımlanan Jackson integrali f fonksiyonunun bir q- antitürevini doğrulamak için q-diferensiyeli:

$$\begin{aligned} D_q F(x) &= \frac{1}{(q-1)x}((1-q)qx \sum_{n=0}^{\infty} q^n f(q^{n+1}x) - (1-q)x \sum_{n=0}^{\infty} q^n f(q^n x)) \\ &= -(\sum_{n=0}^{\infty} q^{n+1} f(q^{n+1}x) - \sum_{n=0}^{\infty} q^n f(q^n x)) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} q^n f(q^n x) - \sum_{n=1}^{\infty} q^n f(q^n x) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

bulunur. ■

Örnek 2.4.3 $m \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $f(x) = x^m$ olsun.

$$\begin{aligned}
\int x^m d_q x = & \ (1-q)x \sum_{n=0}^{\infty} q^n q^{jn} x^n \\
= & \ (1-q)x^{m+1} \sum_{n=0}^{\infty} q^{j(n+1)} \\
= & \ \frac{1-q}{1-q^{m+1}} x^{m+1} = \frac{x^{n+1}}{[n+1]_q}
\end{aligned}$$

olduğu kolayca görülür [23].

Şu ana kadar integral sınırları ile birlikte verilmemişti. Şimdi (2.52) ifadesi ile tanımlanan Jackson formülünden q-integralin tanımını verelim.

2.5 q-İntegral

Tanım 2.5.1 (q-integral) $0 < x < a < b$ olsun. q-integral

$$\int_0^b f(x) d_q x \ := \ (1-q)b \sum_{n=0}^{\infty} q^n f(q^n b) \tag{2.54}$$

ve

$$\int_a^b f(x) d_q x \ := \ \int_0^b f(x) d_q x - \int_0^a f(x) d_q x \tag{2.55}$$

şeklinde tanımlanır.

(2.55) ifadesinde $a = 0$ olması durumunda

$$\int_0^0 f(x) d_q x = (1-q) \cdot 0 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} q^n f(q^n b) = 0$$

olur [25].

Örnek 2.5.2 $b = 1,\ a = 0,\ f(x) = ln(x)$ olsun.

$$\begin{aligned}\int_0^1 ln(x) d_q x &= (1-q)\sum_{n=0}^{\infty} q^n ln(q^n) \\ &= (1-q)\frac{q ln(q)}{(1-q)^2} \\ &= \frac{q ln(q)}{1-q}\end{aligned}$$

Burada, $|q| < 1$ iken

$$\sum_{n=0}^{\infty} n q^n = q\frac{d}{dq}\sum_{n=0}^{\infty} q^n$$

$$= q\frac{d}{dq}\frac{1}{1-q}$$

$$= \frac{q}{(1-q)^2}$$

ifadesi kullanılır.

2.6 Genelleştirilmiş Jackson İntegrali

$b \to \infty$ iken (2.55) ifadesindeki toplam yakınsak değildir yani $b \to \infty$ iken (2.55) ifadesindeki

$$\int_0^{\infty} f(x) d_q x$$

kolayca hesaplanamaz.

O halde bunun yerine $q < 1$ olmak üzere

$$\int_0^{\infty} f(x) d_q x := \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{q^{n+1}}^{q^n} f(x) d_q x \qquad (2.56)$$

integralin bir toplamı alınabilir.

Tanım 2.6.1 (Genelleştirilmiş q-integrali) $q \neq 1$ olmak üzere $[0,\ +\infty)$ üzerinde f fonksiyonunun genelleştirilmiş q-integrali

$$\int_0^\infty f(x)d_qx \ := \ |1-q| \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^n f(q^n) \tag{2.57}$$

şeklinde tanımlanır.

Genelleştirilmiş integrallerin gösterimi bu tanıma göre niçin aynı olduğunu gösterelim.

$q < 1$ için

$$\begin{aligned}
\int_{q^{n+1}}^{q^n} f(x)d_qx &= \int_0^{q^n} f(x)d_qx - \int_0^{q^{n+1}} f(x)d_qx \\
&= (1-q)\sum_{k=0}^{\infty} q^{n+k} f(q^{n+k}) - (1-q)\sum_{k=0}^{\infty} q^{n+k+1} f(q^{n+k+1}) \\
&= (1-q)q^n f(q^n)
\end{aligned}$$

eşitliği kullanılarak

$0 < q < 1$ ise

$$\int_0^\infty f(x)d_qx \ = \ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{q^{n+1}}^{q^n} f(x)d_qx$$

veya

$1 < q$ ise

$$\int_0^\infty f(x)d_qx \ = \ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{q^n}^{q^{n+1}} f(x)d_qx$$

[23].

2.7 Yakınsaklık

Teorem 2.7.1 $\alpha < 1$ için $x = 0$ komşuluğundaki x ler ve $\alpha > 1$ için yeterince büyük x ler için $x^{\alpha} f(x)$ sınırlı ise genelleştirilmiş q- integrali tanımından yakınsaktır [23].

İspat.

$$\int_0^{\infty} f(x) d_q x \;=\; |1-q| \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^n f(q^n)$$

elde edilir.

q veya q^{-1} durumunda toplam

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^n f(q^n) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} q^n f(q^n) + \sum_{n=1}^{\infty} q^{-n} f(q^{-n}) \tag{2.58}$$

şeklindeki parçalanırsa $q < 1$ durumu içinde genelliği bozmadan göz önüne alınabilir. Birinci toplam (2.52) ifadesinden yakınsak olduğu ispatlanır. İkinci toplam; yeterince büyük x ler için $\alpha > 1$ ve $M > 0$ olmak üzere $|x^{\alpha} f(x)| < M$ sağlanırsa bu durumda yeterince büyük n için

$$\begin{aligned} |q^{-n} f(q^{-n})| &= q^{n(c\ell-1)} |q^{-n\alpha} f(q^{-n})| \\ &< M q^{n(\alpha-1)} \end{aligned}$$

dir. Yani ikinci toplam yakınsak bir geometrik seriden daha küçük olup yakınsak olur. Dolayısıyla (2.58) toplamı yakınsaktır. ■

Ayrıca $0 < x < \infty$ için

$$\int_x^{\infty} f(t) d_q t \;:=\; \int_0^{\infty} f(t) d_q t - \int_0^{x} f(t) d_q t \tag{2.59}$$

gerçeklenir.

2.8 q-Fonksiyonları

2.8.1 q-Üstel Fonksiyonlar

Klasik analizde, e^x (üstel fonksiyonu) in seri açılımı

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \qquad x \in \mathbb{R}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

dır. Bu kısımda üstel fonksiyonun q-analogları verilmiştir.

e^x (üstel fonksiyonu) in q-analogu;

$$\begin{aligned} e_q^x :&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{[n]_q!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-q)^n x^n}{(q;q)_n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{((1-q)x)^n}{(q;q)_n} \\ &= \frac{1}{((1-q)x;q)_\infty} \\ &= \frac{1}{(1-(1-q)x)_q^\infty} \end{aligned} \tag{2.60}$$

şeklindedir. Ayrıca üstel fonksiyonunun diğer q-analogu olan E_q^x ise

$$E_q^x := \sum_{n=0}^{\infty} q^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{x^n}{[n]_q!} \tag{2.61}$$

$$= (1+(1-q)x)_q^\infty$$

şeklinde ifade edilir [5].

2.8.2 q- Gamma Fonksiyonu

Klasik analizde gama fonksiyonu

$$\Gamma(n) := \int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}dx, \quad n > 0, \tag{2.62}$$

şeklinde ve beta fonksiyonu ise

$$B(n,s) := \int_0^1 x^{n-1}(1-x)^{s-1}dx, \quad s,n > 0, \tag{2.63}$$

şeklinde ifade edilir.

Gama ve beta fonksiyonlarının bazı özellikleri;

$$\Gamma(1) = 1$$

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$$

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

$$B(n,s) := \frac{\Gamma(n)\Gamma(s)}{\Gamma(n+s)}$$

dir.

Şimdi Γ_q fonksiyonun tanımını verelim:

Tanım 2.8.1 Γ_q fonksiyonu $z \in \mathbb{C}$ için aşağıdaki gibi tanımlanır;

$$\Gamma_q(z) \equiv \begin{cases} \frac{\langle 1;q\rangle_\infty}{\langle z;q\rangle_\infty}(1-q)^{1-z}, & 0 < |q| < 1 \\ \\ \frac{\langle 1;q^{-1}\rangle_\infty}{\langle x;q-1\rangle_\infty}(q-1)^{1-x}q^{\binom{x}{2}}, & |q| > 1. \end{cases} \tag{2.64}$$

Ayrıca Γ_q fonksiyonunun q-integral ile olan tanımını aşağıda verelim [11].

Tanım 2.8.2 Γ_q fonksiyonu

$$E_q^{-qx} = (1-(1-q)x)_q^{\infty}$$

olmak üzere

$$\Gamma_q(\alpha) := \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} E_q^{-qx} d_q x, \ \alpha > 0$$

şeklinde tanımlanır.

Γ_q fonksiyonu,

$$\int_0^{\frac{\infty}{A}} f(x) d_q x \ := \ (1-q) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{q^n}{A} f(\frac{q^n}{A}), \qquad A > 0$$

fonksiyonu kullanılarak

$$\begin{aligned} \Gamma_q(t) &= \int_0^{\frac{1}{1-q}} x^{t-1} E_q^{-qx} d_q x, \qquad t > 0 \\ &= \int_0^{\frac{\infty}{1-q}} x^{t-1} E_q^{-qx} d_q x \\ &= \frac{(1-q)_q^{\infty}}{(1-q^t)_q^{\infty}} (1-q)^{1-s} \end{aligned}$$

şeklinde ifade edilir [11].

Γ_q fonksiyonunun q-analoguna göre $\alpha > 0$ için bazı özellikleri;

$$\frac{\Gamma_q(\alpha+n)}{\Gamma_q(\alpha)} = [\alpha]_{n,q},$$

$$\Gamma_q(1+n) = [n]_q!,$$

$$\Gamma_q(\alpha+1) = [\alpha]_q \Gamma_q(\alpha).$$

Şimdi Γ_q fonksiyonuna benzeyen q-analoglarını bazı örnekleri verelim.

Örnek 2.8.3

$$
\begin{aligned}
(1-a)_q^0 &:= 1 \\
(1-a)_q^n &:= \prod_{k=0}^{n-1}(1-aq^k)
\end{aligned}
\tag{2.65}
$$

[11].

Önerme 2.8.4 $s>0$, $t>0$ olsun ve

$$
K_q(t) := \frac{(1+q)_q^\infty(1+1)_q^\infty}{(1+q^t)_q^\infty(1+q^{1-t})_q^\infty} \tag{2.66}
$$

olmak üzere

$$
\Gamma_q(s) = K_q(s)\int_0^{\frac{\infty}{1-q}} x^{s-1}e_q^{-x}d_qx \tag{2.67}
$$

[11].

İspat. Ramanujan'ın (bkz. [11] formülünden, $|q|<1$, $|a|>|q|$, $|b|<1$ için

$$
\frac{b}{a}| < |x| < 1
$$

olmak üzere

$$
\begin{aligned}
1\Psi1(a,\ q;q;x) &:= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(1-a)_q^n}{(1-b)_q^n}x^n \\
&= \prod_{n=0}^{\infty}\frac{(1-\frac{bq^n}{a})(1-q^{n+1})(1-\frac{q^{n+1}}{ax})(1-axq^n)}{(1-bq^n)(1-\frac{q^{n+1}}{a})(1-\frac{bq^n}{ax})(1-xq^n)}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned}
\int\limits_0^{\frac{\infty}{1-q}} t^{s-1} e_q^{-t} d_q t &= (1-q) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{q^n}{1-q} (\frac{q^n}{1-q})^{s-1} e^{-\frac{q^n}{1-q}} \\
&= (1-q)^{1-s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^n \frac{q^{ns}}{q^n} e^{-\frac{q^n}{1-q}} \\
&= (1-q)^{1-s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{q^{ns}}{(1+q^n)_q^{\infty}} \\
&= \frac{(1-q)^{1-s}}{(1+1)_q^{\infty}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{q^{ns}(1+1)_q^n}{(1+0)_q^n} \\
&= \frac{(1-q)^{1-s}}{(1+1)_q^{\infty}} 1\Psi1(-1;0;q;q^s) \\
&= \frac{(1-q)^{1-s}}{(1+1)_q^{\infty}} \prod_{n=0}^{\infty} \frac{(1-q^{n+1})(1+\frac{q^{n+1}}{q^s})(1+q^s q^n)}{(1+q^{n+1})(1-q^s q^n)} \\
&= \frac{(1-q)^{1-s}}{(1+1)_q^{\infty}} \frac{(1-q)_q^{\infty}(1+q^{1-s})_q^{\infty}(1+q^s)_q^{\infty}}{(1+q)_q^{\infty}(1-q^s)_q^{\infty}} \\
&= \frac{\Gamma_q(s)}{K_q(s)}
\end{aligned}$$

olduğu görülür. ■

Tanım 2.8.5 $\alpha, \beta > 0$ için q-Beta fonksiyonu

$$B_q(\alpha,\ \beta)\ := \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-qt)_q^{\beta-1} d_q t,\ \alpha,\ \beta > 0$$

şeklinde tanımlanır [25].

q-Beta fonksiyonu q-Gamma fonksiyonu ile arasındaki bağıntı;

$$B_q(\alpha,\ \beta) = \frac{\Gamma_q(\alpha)\Gamma_q(\beta)}{\Gamma_q(\alpha+\beta)}$$

ve

$$\Gamma_q(\alpha) = \frac{B_q(\alpha, \infty)}{(1-q)^t}$$

[25].

Tanım 2.8.6 $\Omega \subset (0, \infty)$ olmak üzere ve $\mathcal{X}_\Omega(t)$, Ω nın karekteristik fonksiyonu olsun. $\forall z > 0$ için

$$\int_0^\infty \mathcal{X}_{(0,z]}(t) f(t) d_q t = (1-q) \sum_{q^i \leq z} q^i f(q^i), \tag{2.68}$$

$$\int_0^\infty \mathcal{X}_{[z,\infty)}(t) f(t) d_q t = (1-q) \sum_{q^i \geq z} q^i f(q^i) \tag{2.69}$$

eşitlikleri gerçeklenir [6].

2.8.3 q- Taylor Serisi ve q-Leibniz Teoremi

Tanım 2.8.7 (q-Taylor serisi) $x = c$ için $f(x)$ in q-Taylor serisi

$$[j]_q! = \begin{cases} 1, & j = 0, \\ [1]_q \times [2]_q \times \cdots \times [j]_q, & j \in \mathbb{N} \end{cases}$$

olmak üzere

$$f(x) := \sum_{j=0}^{\infty} (D_q^j)(c) \frac{(x-c)_q^j}{[j]_q!}$$

şeklinde tanımlanır.

f fonksiyonunun q-integral ya da q-Jackson integraline göre formülü;

$$\int_0^x f(t) d_q t := (1-q) x \sum_{k=0}^{\infty} q^k f(q^k x) \ , \ x \in (0, \ b) \tag{2.70}$$

ve

$$f(x) : [0, \ \infty) \to \mathbb{R}$$

fonksiyonunun genelleştirilmiş q-integralinin formülü;

$$\int_0^{\infty} f(t) d_q t := (1-q) \sum_{k=-\infty}^{\infty} q^k f(q^k) \tag{2.71}$$

olur.

Burada belirtelim ki (2.70) ve (2.71) eşitliklerinin sağ tarafındaki seriler mutlak yakınsaktır [25].

Uyarı 2.8.8 e_k elemanter simetrik polinom tanımlamak üzere

$$q^{\binom{k}{2}} \binom{n}{k} = \mathrm{e}_k(1, \ q, \ \ldots \ , \ q^{n-1}) \tag{2.72}$$

ve h_k tam simetrik polinomu tanımlamak üzere

$$\binom{n+k\ -1}{k} = \mathrm{h}_k(1,\ q,\ \ldots\ ,\ q^{n-1}), \tag{2.73}$$

simetrik polinomlar mevcuttur.

Şimdi Rothe-von Grüson-GauB formulünün ispatını verelim.

Teorem 2.8.9

$$\sum_{n=0}^{m}(-1)^n \binom{m}{n} q^{\binom{n}{2}} u^n = (u;q)_m \tag{2.74}$$

[11].

İspat. $m = 1$ için formül doğru olsun. $m - 1$ için formülün doğru olduğunu kabul edelim. Dolaysıyla m içinde formül doğrudur. Çünkü; $\sum_{n=0}^{m}(-1)^n \binom{m}{n} q^{\binom{n}{2}} u^n$

$$(=)\sum_{n=0}^{m-1}(-1)^n \binom{m\ -1}{n} q^{\binom{n}{2}} u^n$$

$$+\sum_{n=0}^{m-1}(-1)^n \binom{m\ -1}{n\ -1}_m \binom{m}{2}_m q^{\binom{n}{2}} u + (-1)q$$

$$= (-1)^m q^{\binom{m}{2}} u^m + (u;q)_{m-1} + \sum_{n=0}^{m-2}(-1)^{n+1} \binom{m\ -1}{n} q^{\binom{n}{2}+m-1} u^{n+1}$$

$$= (-1)^m q^{\binom{m}{2}} u^m + (u;q)_{m-1}(1 - uq^{m-1}) + (-1)^{m-1_q \binom{m-1}{2}+m-1} u^m$$

$$= (u;q)_m.$$

■

Teorem 2.8.10 (q-Leibniz Teoremi) $f(x)$ ve $g(x)$ n mertebeden q- diferansiyellenebilir fonksiyonlar olsun. Bu durumda $(fg)(x)$ n mertebeden q- diferansiyellenebilir ve

$$\mathrm{D}_q^n(fg)(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{D}_q^k(f)(xq^{n-k})\mathrm{D}_q^{n-k}(g)(x) \tag{2.75}$$

[11].

İspat. $n = 1$ için (2.75) formülü (2.48) ifadesiden doğrudur. $n = m$ için (2.75) formülün doğru olduğunu kabul edelim. Dolaysıyla $n = m+1$ içinde (2.75) formülü doğrudur. Çünkü

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}_q^{m+1}(fg)(x) &= \mathrm{D}_q(\mathrm{D}_q^m(fg)(x)) \\
&= \mathrm{D}_q \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \mathrm{D}_q^k(f)(xq^{m-k})\mathrm{D}_q^{m-k}(g)(x)
\end{aligned}$$

$$(=) \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (q^{m-k}\mathrm{D}_q^{k+1}(f)(xq^{m-k})\mathrm{D}_q^{m-k}(g)(x)$$

$$+ \mathrm{D}_q^k(f)(xq^{m+1-k})\mathrm{D}_q^{m+1-k}(g)(x))$$

$$= \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \mathrm{D}_q^k(f)(xq^{m+1-k})\mathrm{D}_q^{m+1-k}(g)(x)$$

$$+ \sum_{k=1}^{m+1} \binom{m}{k-1} q^{m+1-k}\mathrm{D}_q^k(f)(xq^{m+1-k})\mathrm{D}_q^{m+1-k}(g)(x)$$

$$= f(xq^{m+1})\mathrm{D}_q^{m+1}(g)(x) + \sum_{k=1}^{m} \left(\binom{m}{k} + q^{m+1-k} \binom{m}{k-1} \right)$$

$$\times \mathrm{D}_q^k(f)(xq^{m+1-k})\mathrm{D}_q^{m+1-k}(g)(x) + \mathrm{D}_q^{m+1}(f)(x)g(x)$$

$$(=) \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} \mathrm{D}_q^k(f)(xq^{m+1-k})\mathrm{D}_q^{m+1-k}(g)(x).$$

■

2.8.4 q-Analiz ve Analiz Arasındaki Benzerlikler

Bu kısımda klasik analiz ile q-analizdeki türev ve integrallerdeki bazı benzerlikler aşağıdaki tablo ile verilmiştir.

q-Analiz	Klasik Analiz
$qx \to f(qx)$	$x \to f(x)$
$(D_q f)(x) \equiv \frac{\varphi(x)-\varphi(qx)}{(1-q)x}$	$df(x) \equiv \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$
$\int\limits_0^x f(t,\ q)d_q(t) \equiv x(1-q)\sum\limits_{n=0}^{\infty} f(xq^n,\ q)q^n$	$\int\limits_0^x f(t)dt$
$\int\limits_0^x t^k d_q(t) = \frac{x^{k+1}}{\{k+1\}_q}$	$\int\limits_0^x t^k dt = \frac{x^{k+1}}{k+1}$
$D_q x^k = \{k\}_q x^{k-1}$	$dx^k = kx^{k-1}$

$f(x \oplus_q y) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{\{k\}_q!} \mathrm{D}_q^k f(x)$	$f(x+y) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(y)}{k!} x^k$
$f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{\mathrm{D}_q^k f(y)}{\{k\}_q!} (x\mathrm{H}_q y)^k$	$f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(y)}{k!} (x-y)^k$
$\mathrm{D}_q^n (fg)(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}_q$	$d^n(fg) =$
$\mathrm{D}_k^n(fg) = \mathrm{D}_q^k(f)(xq^{n-k})\mathrm{D}_q^{n-k}(g)(x)$	$\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d^k f d^{n-k} g(x)$
$\mathrm{D}_q(\frac{f(x)}{g(x)}) = \frac{g(x)\mathrm{D}_q f(x) - f(x)\mathrm{D}_q g(x)}{g(qx)g(x)}$	$d(\frac{f}{g}) = \frac{f^f g - g^f f}{g^2}$
$\int\limits_a^b (\mathrm{D}_q f(t,\ q)) g(t,\ q) d_q(t) =$	$\int\limits_a^b f' g dx$
$= \left[f(t,\ q)g(t,\ q)\right]_a^b - \int^b f(qt,\ q)\mathrm{D}_q g(t,\ q) d_q(t)$	$= \left[fg\right]_a^b - \int\limits_a^b fg' dx$

3 q-ANALİZDE BAZI HARDY EŞİTSİZLİKLERİ

Son yıllarda kuantum hesabı (q-calculus) aktif olarak geliştirildi. Birçok sürekli bilimsel problem, q-calculus adını kullanarak onun fark versiyonlarına sahiptir. q-calculus, kombinasyonlarda, özel fonksiyonlarda, fraktallarda, dinamik sistemlerde, sayılar teorisinde, hesaplama yöntemlerinde, kuantum mekaniğinde, bilgisayar teknolojisinde ve birçok bilimsel alanda uygulaması mevcuttur. [2, 11, 10, 12, 17].

Şimdiye kadar, klasik analizden elde edilen birçok eşitsizliklerin q-analogları hesaplanmış olup ancak Hardy-tipli q-eşitsizlikleri son yıllarda incelenmeye başlanmıştır. [14, 21, 18, 26, 27]. Hardy eşitsizliği ve çeşitli genelleştirmeleri klasik analizde önemli bir rol oynamaktadır. Bu nedenle, son elli yıl boyunca birçok uzayda Hardy ve Hardy tipi eşitsizlikleri ile ilgili bilimsel makaler yayınlanmıştır. [19, 20]. Şimdiye kadar klasik analizden elde edilen birçok eşitsizliklerin q-analogları hesaplanmış olup ancak Hardy tipli q-eşitsizlikleri yeni bir araştırma konusu olmuştur. [14, 21, 18, 26, 27].

3.1 q-Analizde Bazı Hardy Eşitsizlikleri

Bu kısımda, Hardy tipli q-eşitsizlikleri ile ilgili bazı tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

$\alpha < 1 - 1/p$ için

$p \geq 1$ ($f \equiv 0$ dan farklı) veya $p < 0$ ve $f > 0$ ise

$$\int_0^\infty (x^{\alpha-1}\int_0^x t^{-\alpha} f(t)\mathrm{d}t)^p \mathrm{d}x < (\frac{p}{p-\alpha p-1})^p \int_0^\infty f^p(t)\mathrm{d}t, \ f \geq 0 \tag{3.1}$$

gerçeklenir.

$p > 1$, $\alpha > 0$ ($f \equiv 0$ dan farklı) ve en iyi sabit ile

$$\int_0^\infty \Big(\frac{1}{x^\alpha\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}f(t)\mathrm{d}t\Big)^p\mathrm{d}x < \Big[\frac{\Gamma(1-1/p)}{\Gamma(\alpha+1-1/p)}\Big]^p\int_0^\infty f^p(t)dt, \quad f\geq 0 \tag{3.2}$$

gerçeklenir.

$\alpha=0$ için (3.1) eşitsizliğinden klasik Hardy eşitsizliği

$$\int_0^\infty \Big(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt\Big)^p dx < \Big(\frac{p}{p-1}\Big)^p\int_0^\infty f^p(t)dt,\ f\geq 0,\ f\not\equiv 0, \tag{3.3}$$

şeklinde ifade edilir. Ayrıca $0<x<b$ için aşağıdaki Hardy tipli q-eşitsizliği mevcuttur;

$$\int_0^b \Big(x^{\alpha-1}\int_0^x t^{-\alpha}f(t)\mathrm{d}t\Big)^p\mathrm{d}x \leq C\int_0^b f^p(t)\mathrm{d}_q t,\ f\geq 0 \tag{3.4}$$

[20].

Şimdi Hardy tipli q-eşitsizliği ile ilgili teoremi aşağıda verelim.

Teorem 3.1.1 $\alpha<(p-1)/p$ olsun. $1\leq p<\infty$ ve $f\geq 0$ yada $p<0$ ve $f>0$ olması durumunda

$$\int_0^\infty x^{p(\alpha-1)}\Big(\int_0^x t^{-\alpha}f(t)d_q t\Big)^p d_q x \leq C\int_0^\infty f^p(t)d_q t \tag{3.5}$$

ve

$$C=\frac{1}{[(p-1)/p-\alpha]_q^p} \tag{3.6}$$

mevcuttur [20].

$0<p<1$ olması durumunda $f\geq 0$ için (3.6) sabiti ile (3.5) eşitsizliğinin tersi elde edilir. Dolayısıyla her üç durumda da (3.6) sabiti ile mümkün olan en iyi sonuç bulunur.

İspat. Kabul edelim ki $1<p<\infty$ olsun. Tanım 3.5 den, (2.54) ve (2.57) ifadelerinden dolayı

$$\begin{aligned} L(f) \ &:= \int\limits_0^\infty x^{p(\alpha-1)}\Big(\int\limits_0^x t^{-\alpha}f(t)\mathrm{d}_qt\Big)^p\mathrm{d}_qx \\ &= \int\limits_0^\infty x^{p(\alpha-1)}\Big((1-q)\sum_{i=0}^\infty x^{1-\alpha}q^{(1-\alpha)i}f(xq^i)\Big)^p\mathrm{d}_qx \\ &= (1-q)^{p+1}\sum_{j=-\infty}^\infty q^{jp(\alpha-1)}\Big(\sum_{i=0}^\infty q^{(i+j)(1-\alpha)}f(q^{i+j})\Big)^p q^j \\ &= (1-q)^{p+1}\sum_{j=-\infty}^\infty q^{j[p(\alpha-1)+1]}\Big(\sum_{i=j}^\infty q^{i(1-\alpha)}f(q^i)\Big)^p \\ &\equiv (1-q)^{p+1}I^p \end{aligned}$$

elde edilir.

$1/p+1/p'=1$ olmak üzere $g=\{g_k\}_{k=-\infty}^\infty \in l_{p'}(\mathbb{Z})$, $g\geq 0, \|g\|_{l_p},=1$ olsun. Dolayısıyla $\theta(z)$ Heaviside'nin basamak fonksiyonu yani $z\geq 0$ için $\theta(z)=1$ ve $z<0$ için $\theta(z)=0$ dır.

Bundan dolayı $p>1$ için $l_p(\mathbb{Z})$ de çift prensip üzerinde odaklı olmak üzere ve Tanım 2.1.15 (Hölder-Rogers eşitsizliği) den

$$\begin{aligned} I &= \sup_{\|g\|_{l_{p'}}=1}\sum_i\sum_j g_jq^{j(\alpha-1/p')}\theta(i-j)q^{i(1/p'-\alpha)}q^{i/p}f(q^i) \\ &\leq \sup_{\|g\|_{l_{p'}}=1}\Big(\sum_i\sum_j g_j^{p'}q^{j(\alpha-1/p')}\theta(i-j)q^{i(1/p'-\alpha)}\Big)^{1/p'} \\ &\times\Big(\sum_i\sum_j f^p(q^i)q^iq^{(1/p'-\alpha)i}\theta(i-j)q^{j(\alpha-1/p')}\Big)^{1/p} \\ &\leq \sup_{\|g\|_{l_{p'}}=1}\Big(\sum_j g_j^{p'}q^{j(\alpha-1/p')}\sum_{i=j}^\infty q^{i(1/p'-\alpha)}\Big)^{1/p'} \\ &\times\Big(\sum_i f^p(q^i)q^iq^{i(1/p'-\alpha)}\sum_{j=-\infty}^{i} q^{j(\alpha-1/p')}\Big)^{1/p} = \sup_{\|g\|_{l_{p'}}=1} I_1(g)I_2(f) \end{aligned}$$

elde edilir.

Böylece

$$
\begin{aligned}
I_1^{p'}(g) &= \sum_j g_j^{p'} q^{j(\alpha-1/p')} q^{j(1/p'-\alpha)} \sum_{i=0}^{\infty} q^{i(1/p'-\alpha)} \\
&= \frac{1}{1-q^{1/p'-\alpha}} \sum_j g_j^{p'} \\
&= \frac{1}{1-q^{1/p'-\alpha}} \|g\|_{l_{p'}}^{p} \\
&= \frac{1}{(1-q)[(p-1)/p-\alpha]_q} \|g\|_{l_{p'}}^{p}
\end{aligned}
$$

ve

$$
I_2^p(f) = \sum_i f^p(q^i) q^i q^{i(1/p'-\alpha)} q^{i(\alpha-1/p')} \sum_{j=0}^{\infty} q^{j(1/p'-\alpha)}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{1-q^{1/p'-\alpha}} \sum_i q^i f^p(q^i) \\
&= \frac{1}{(1-q)^2[(p-1)/p-\alpha]_q} \int_0^{\infty} f^p(t) \mathrm{d}_q t
\end{aligned}
$$

olup

$$
I^p \leq \frac{1}{(1-q)^{p+1}[(p-1)/p-\alpha]_q^p} \int_0^{\infty} f^p(t) \mathrm{d}_q t
$$

ifadesi elde edilir.

Yukarıdaki ifadeler yerine yazılırsa (3.6) sabiti ile (3.5) eşitsizliğinin

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\infty} x^{p(\alpha-1)} \Big(\int_0^{x} t^{-\alpha} f(t) d_q t \Big)^p d_q x &= (1-q)^{p+1} I^p \\
&\leq \frac{1}{[(p-1)/p-\alpha]_q^p} \int_0^{\infty} f^p(t) d_q t
\end{aligned}
$$

şeklinde olduğu görülür.

Şimdi (3.6) sabiti ile mümkün olan en iyi sonucu gösterelim.

Eğer $\beta > -1/p$ ise $t>0$ için $f_\beta(t) = t^\beta \chi_{(0,1]}(t)$ elde edilir ve buradan

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty f_\beta^p(t)\mathrm{d}_q t &= (1-q)\sum_{i=-\infty}^{\infty} q^i f_\beta^p(q^i) \\
&= (1-q)\sum_{i=0}^{\infty} q^i q^{p\beta i} \\
&= \frac{1-q}{1-q^{1+p\beta}} \\
&= \frac{1}{[1+p\beta]_q}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
L(f_\beta) &= \int_0^\infty x^{p(\alpha-1)}\Big(\int_0^x t^{-\alpha} f_\beta(t)\mathrm{d}_q t\Big)^p \mathrm{d}_q x \\
&= (1-q)\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{j[p(\alpha-1)+1]}\Big((1-q)\sum_{i=0}^{\infty} q^{(i+j)(1-\alpha)} f_\beta(q^{i+j})\Big)^p \\
&\geq (1-q)^{p+1}\sum_{j=0}^{\infty} q^{j[p(\alpha-1)+1]}\Big(\sum_{i=j}^{\infty} q^{i(1-\alpha)} q^{i\beta}\Big)^p \\
&= (1-q)^{p+1}\sum_{j=0}^{\infty} q^{j(1+p\beta)}\Big(\sum_{i=0}^{\infty} q^{i(1-\alpha+\beta)}\Big)^p \\
&= \Big(\frac{1-q}{1-q^{1-\alpha+\beta}}\Big)^p \frac{1}{[1+p\beta]_q}
\end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanır. Buradan da

$$\begin{aligned}
\sup_{\beta>-1/p}\frac{1}{1-q^{1-\alpha+\beta}} &= \frac{1}{1-q^{1-1/p-\alpha}} \\
&= \frac{1}{1-q^{(p-1)/p-\alpha}}
\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Dolayısıyla

$$
\begin{aligned}
C &\geq \sup_{\beta>-1/p} \frac{L(f_\beta)}{\int\limits_0^\infty f_\beta^p(t)\mathrm{d}_q t} \\
&\geq \sup_{\beta>-1/p} \Big(\frac{1-q}{1-q^{1-\alpha+\beta}}\Big)^p \\
&= \frac{1}{\Big[(p-1)/p-\alpha\Big]_q^p}
\end{aligned}
$$

olacak şekilde bir C vardır. (3.6) ve (3.5)'de özel olarak $p=1$ seçilirse

$$
\begin{aligned}
L(f) &= (1-q)^2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{j\alpha} \sum_{i=j}^{\infty} q^{i(1-\alpha)} f(q^i) \\
&= (1-q)^2 \sum_{i=-\infty}^{\infty} q^{i(1-\alpha)} f(q^i) \sum_{j=-\infty}^{i} q^{j\alpha} \\
&= (1-q)^2 \sum_{i=-\infty}^{\infty} q^{i} f(q^i) \sum_{j=0}^{\infty} q^{-j\alpha} \\
&= \frac{1}{[-\alpha]_q} \int\limits_0^\infty f(t)\mathrm{d}_q t
\end{aligned}
$$

elde edilir. Buradan $p<0$ ve $f>0$ durumunda $\mu=(1/p'-\alpha)/p'$ için

$$
\begin{aligned}
L(f) &= \int\limits_0^\infty x^{p(\alpha-1)} \Big(\int\limits_0^x t^{-\alpha} f(t)\mathrm{d}_q t\Big)^p \mathrm{d}_q x \\
&= (1-q)^{p+1} \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{j[p(\alpha-1)+1]} \Big(\sum_{i=j}^{\infty} q^{i(1-\alpha)} f(q^i)\Big)^p \\
&= (1-q)^{p+1} \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{j[p(\alpha-1)+1]} \Big(\sum_{i=j}^{\infty} q^{i\mu} q^{i(1-\alpha-\mu)} f(q^i)\Big)^p
\end{aligned}
$$

elde edilir.

$p < 0$ için Tanım 2.1.15 (Hölder-Rogers eşitsizliği)' den

$$L(f) \leq (1-q)^{p+1} \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{j[p(\alpha-1)+1]} \Big(\sum_{i=j}^{\infty} q^{ip'\mu} \Big)^{p-1} \sum_{i=j}^{\infty} q^{ip(1-\alpha-\mu)} f^p(q^i)$$

$$= (1-q)^{p+1} \Big(\sum_{i=0}^{\infty} q^{ip'\mu} \Big)^{p-1} \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{j[p(\alpha-1)+1+p\mu]} \sum_{i=j}^{\infty} q^{ip(1-\alpha-\mu)} f^p(q^i)$$

$$= \frac{(1-q)^{p+1}}{(1-q^{(p-1)/p-\alpha})^{p-1}} \sum_{i=-\infty}^{\infty} f^p(q^i) q^{i(1+1/p'-\alpha)} \sum_{j=-\infty}^{i} q^{j(\alpha-1/p')}$$

$$= \frac{(1-q)^{p+1}}{(1-q^{(p-1)/p-\alpha})^{p-1}} \sum_{j=0}^{\infty} q^{j(1/p'-\alpha)} \sum_{i=-\infty}^{\infty} q^i f^p(q^i)$$

$$= \Big(\frac{1-q}{1-q^{(p-1)/p-\alpha}} \Big)^p \int_0^{\infty} f^p(t) \mathrm{d}_q t$$

$$= \Big[\frac{p-1}{p} - \alpha \Big]_q^{-p} \int_0^{\infty} f^p(t) \mathrm{d}_q t$$

elde edilir. Bu da (3.5) eşitsizliğindeki (3.6) C sabitini ifade eder.

Şimdi (3.5) eşitsizliğindeki (3.6) eşitliğindeki C sabitini

$$\alpha - 1 < \beta_1 < -1/p < \beta_2$$

için gösterelim.

$$f_{\beta_1,\beta_2}(t) = t^{\beta_1} \chi_{(0,1]}(t) + t^{\beta_2} \chi_{(1,\infty)}(t), \qquad t > 0$$

olsun. Bu durumda

$$\int_0^\infty f^p_{\beta_1,\beta_2}(t)\mathrm{d}_qt = (1-q)\Big(\sum_{i=-\infty}^{-1} q^{i(1+p\beta_2)} + \sum_{i=0}^{\infty} q^{i(1+p\beta_1)}\Big)$$

$$= (1-q)\Big(\frac{q^{|1+p\beta_2|}}{1-q^{|1+p\beta_2|}} + \frac{1}{1-q^{1+p\beta_1}}\Big)$$

$$:= F^-(\beta_1,\ \beta_2)$$

ve

$$L(f_{\beta_1,\beta_2}) = \int_0^\infty x^{p(\alpha-1)}\Big(\int_0^x t^{-\alpha} f_{\beta_1,\beta_2}(t)\mathrm{d}_qt\Big)^p \mathrm{d}_qx$$

$$= (1-q)^{p+1}\sum_{i=-\infty}^{\infty} q^{i(1+p(\alpha-1))}\Big(\sum_{j=i}^{\infty} q^{j(1-\alpha)} f_{\beta_1,\beta_2}(q^j)\Big)^p$$

$$= (1-q)^{p+1}\Big[\sum_{i=-\infty}^{-1} q^{i(1+p(\alpha-1))}\Big(\sum_{j=i}^{-1} q^{j(1-\alpha+\beta_2)} + \sum_{j=0}^{\infty} q^{j(1-\alpha+\beta_1)}\Big)^p$$

$$+ \sum_{i=0}^{\infty} q^{i(1+p(\alpha-1))}\Big(\sum_{j=i}^{\infty} q^{j(1-\alpha+\beta_1)}\Big)^p\Big]$$

$$> (1-q)^{p+1}\sum_{i=0}^{\infty} q^{i(1+p(\alpha-1))}\Big(\sum_{j=i}^{\infty} q^{j(1-\alpha+\beta_1)}\Big)^p$$

$$= (1-q)^{p+1}\sum_{i=0}^{\infty} q^{i(1+p\beta_1)}\Big(\sum_{j=0}^{\infty} q^{j(1-\alpha+\beta_1)}\Big)^p$$

$$= \frac{1-q}{1-q^{1+p\beta_1}}\Big(\frac{1-q}{1-q^{1-\alpha+\beta_1}}\Big)^p$$

$$:= F^+(\beta_1,\ \beta_2).$$

C, (3.6) daki bir sabit ise bu durumda

$$C \geq \sup_{\alpha-1<\beta_1<-1/p} \lim_{\beta_2\to\infty} \frac{F^+(\beta_1,\beta_2)}{F^-(\beta_1,\beta_2)}$$

$$= \sup_{\alpha-1<\beta_1<-1/p} \Big(\frac{1-q}{1-q^{1-\alpha+\beta_1}}\Big)^p$$

$$= \Big(\frac{1-q}{1-q^{1-\alpha-1/p}}\Big)^p$$
$$= \frac{1}{[(p-1)/p-\alpha]_q^p}.$$

Böylece (3.6) sabiti için her durumda kesin olarak ispatlanmış olur.

Son olarak, $0<p<1$ durumu için bakalım. $\gamma=(p-1)/p-\alpha$ olsun. $f\geq 0$ için (3.5) ifadesinin sağ tarafı sonlu olduğundan

$$[\gamma]_q^{-1}\int_0^\infty f^p(t)\mathrm{d}_qt = \frac{(1-q)^2}{1-q^\gamma}\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^j f^p(q^j)$$

$$= (1-q)^2\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^j f^p(q^j)\sum_{i=0}^{\infty} q^{i\gamma}$$

$$= (1-q)^2\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^j f^p(q^j)\sum_{i=-\infty}^{0} q^{-i\gamma}$$

$$= (1-q)^2\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{j(1+\gamma)} f^p(q^j)\sum_{i=-\infty}^{j} q^{-i\gamma}$$

$$= (1-q)^2\sum_{i=-\infty}^{\infty} q^{-i\gamma}\sum_{j=i}^{\infty} q^{j(1-p)\gamma}q^{jp(1-\alpha)} f^p(q^j)$$

$$= J$$

elde edilir.

$1/p$ ve $1/(1-p)$ kuvvetleri ile Tanım 2.1.15 (Hölder-Rogers eşitsizliği) kullanılarak

$$J \leq (1-q)^2 \sum_{i=-\infty}^{\infty} q^{-i\gamma}\Big(\sum_{k=i}^{\infty} q^{k\gamma}\Big)^{1-p}\Big(\sum_{j=i}^{\infty} q^{j(1-\alpha)} f(q^j)\Big)^p$$

$$= [\gamma]_q^{p-1}(1-q)^{p+1} \sum_{i=-\infty}^{\infty} q^{-ip\gamma}\Big(\sum_{j=i}^{\infty} q^{j(1-\alpha)} f(q^j)\Big)^p$$

$$= [\gamma]_q^{p-1}(1-q) \sum_{i=-\infty}^{\infty} q^i q^{ip(\alpha-1)}\Big((1-q)q^i \sum_{j=0}^{\infty} q^j q^{-(i+j)\alpha} f(q^{i+j})\Big)^p$$

$$= [\gamma]_q^{p-1} \int_0^{\infty} x^{p(\alpha-1)}\Big(\int_0^x t^{-\alpha} f(t)\mathrm{d}_q t\Big)^p \mathrm{d}_q x$$

bulunur yani $f \geq 0$ ve (3.7) ifadesinin sol tarafı için

$$\int_0^{\infty} f^p(t)\mathrm{d}_q t \leq [\gamma]_q^p \int_0^{\infty} x^{p(\alpha-1)}\Big(\int_0^x t^{-\alpha} f(t)\mathrm{d}_q t\Big)^p \mathrm{d}_q x \tag{3.7}$$

sonludur.

Daha sonra (3.7) ifadesindeki

$$[\gamma]_q^p = [(p-1)/p-\alpha]_q^p$$

sabitini doğru olduğunu gösterelim.

$\alpha - 1 < \beta < -1/p$ için

$$f_\beta(t) = t^\beta \chi_{[1,\infty)}(t), \quad t > 0$$

olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\int\limits_0^\infty f_\beta^p(t)\mathrm{d}_q t &= (1-q)\sum_{i=-\infty}^{\infty} q^i f_\beta^p(q^i) \\
&= (1-q)\Big[\sum_{i=-\infty}^{0} q^i f_\beta^p(q^i) + \sum_{i=1}^{\infty} q^i f_\beta^p(q^i)\Big] \\
&= (1-q)\sum_{i=-\infty}^{0} q^{i(1+p\beta)} \\
&= (1-q)\sum_{i=0}^{\infty} q^{i|1+p\beta|} \\
&= \frac{1-q}{1-q^{|1+p\beta|}}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
L(f_\beta) &= \int\limits_0^\infty x^{p(\alpha-1)}\Big(\int\limits_0^x t^{-\alpha} f_\beta(t) d_q t\Big)^p d_q x \\
&= (1-q)\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{j[p(\alpha-1)+1]}\Big((1-q)q^j \sum_{i=0}^{\infty} q^i q^{-(i+j)\alpha} f_\beta(q^{i+j})\Big)^p \\
&= (1-q)^{p+1}\Big[\sum_{j=-\infty}^{0} q^{j[p(\alpha-1)+1]}\Big(\sum_{i=j}^{\infty} q^{i(1-\alpha)} f_\beta(q^i)\Big)^p \\
&+ \sum_{j=1}^{\infty} q^{j[p(\alpha-1)+1]}\Big(\sum_{i=j}^{\infty} q^{i(1-\alpha)} f_\beta(q^i)\Big)^p\Big] \\
&= (1-q)^{p+1}\sum_{j=-\infty}^{0} q^{j[p(\alpha-1)+1]}\Big(\sum_{i=j}^{0} q^{i(1-\alpha+\beta)}\Big)^p \\
&= (1-q)^{p+1}\sum_{j=-\infty}^{0} q^{j[p(\alpha-1)+1]} q^{jp(1-\alpha+\beta)}\Big(\sum_{i=0}^{-j} q^{i(1-\alpha+\beta)}\Big)^p \\
&\le \frac{(1-q)^{p+1}}{(1-q^{1-\alpha+\beta})^p}\sum_{j=-\infty}^{0} q^{j[1+p\beta]} \\
&= \frac{1-q}{1-q^{|1+p\beta|}}\Big(\frac{1-q}{1-q^{1-\alpha+\beta}}\Big)^p.
\end{aligned}$$

C, (3.7) deki bir sabit ise bu durumda

$$C \geq \sup_{\beta\in(\alpha-1,-1/p)} \frac{\int\limits_0^\infty f_\beta^p(t)d_qt}{L(f_\beta)}$$

$$\geq \sup_{\beta\in(\alpha-1,-1/p)} \Big(\frac{1-q^{1-\alpha+\beta}}{1-q}\Big)^p$$

$$= \Big(\frac{1-q^{(p-1)/p-\alpha}}{1-q}\Big)^p$$

$$= \Big[\frac{p-1}{p}-\alpha\Big]_q^p$$

$$= [\gamma]_q^p$$

ve bu da (3.7) ifadesindeki $[\gamma]_q^p$ sabitinin doğru olduğunu gösterir. Böylece Teorem 3.1.1 ispatlanır. ■

Uyarı 3.1.2 (3.1) eşitsizliğinin q-analogundaki sabit (3.1) deki değerinden daha küçüktür. Gerçekten de, $p \geq 1$ veya $p < 0$ için $\alpha < 1 - 1/p$ ise bu durumda $\alpha > -1/p$ için

$$\frac{1}{[(p-1)/p-\alpha]_q} < \frac{p}{p-\alpha p-1}. \tag{3.8}$$

$\alpha < -1/p$ için (3.8) eşitsizliğinin tersi gerçeklenir.

$$h(q) := \frac{p(1-q^{(p-1)/p-\alpha})}{(p-\alpha p-1)+q-1}$$

nun $\alpha > -1/p$ için türevi

$$h'(q) = -q^{-1/p-\alpha}+1 < 0$$

olduğundan herhangi bir $0 < q < 1$ için (3.8) eşitsizliğinin

$$\frac{(1-q)}{(1-q^{(p-1)/p-\alpha})} < \frac{p}{(p-\alpha p-1)}$$

olduğu görülür ve böylece $h(q) > h(1) = 0$.

Sonlu aralıkta Hardy eşitsizliği sağlanır. Çünkü genelliği bozmaksızın [0, 1] aralığındaki q-integrali, değişkenler

$$z = xl, \quad 0 < l < \infty$$

şeklinde seçilirse de q-integrali gerçeklenir [17].

Bundan dolayı, [0, 1] aralığındaki q-integrali doğal olarak $[0,\ l]$ aralığındaki q-integrali olur.

Böylece $b = 1$ için (3.4) ifadesi göz önüne alınarak aşağıdaki teoremi verelim [20].

Teorem 3.1.3 $\alpha < 1 - 1/p$ olsun. $1 \leq p < \infty$ ve $f \geq 0$ veya $p < 0$ ve $f > 0$ ise bu durumda

$$\int_0^1 x^{p(\alpha-1)}\Big(\int_0^x t^{-\alpha} f(t)\mathrm{d}_q t\Big)^p \mathrm{d}_q x < \frac{1}{[(p-1)/p-\alpha]_q^p} \int_0^1 f^p(t)\mathrm{d}_q t \qquad (3.9)$$

eşitsizliği gerçeklenir. ($f \equiv 0$ değilse) ve $[(p-1)/p-\alpha]_q^{-p}$ sabiti mevcuttur [20].

İspat. Teorem 3.1.3'ün ispatı Teorem 3.1.1 ile benzer şekilde ispatlanır. Dolayısıyla sadece karşılık gelen ilişkilerin bazı farklılıklarına işaret edeceğiz. $p > 1$ olması durumunda sırasıyla

$$\int_0^1 x^{p(\alpha-1)}\Big(\int_0^x t^{-\alpha} f(t)d_q t\Big)^p d_q x = (1-q)^{p+1} \sum_{j=0}^{\infty} q^{j[p(\alpha-1)+1]}\Big(\sum_{i=j}^{\infty} q^{i(1-\alpha)} f(q^i)\Big)^p$$

$$= (1-q)^{p+1} I^p$$

ve

$$I < \sup_{\|g\|_{p'}=1 g\geq 0} \Big(\sum_{j=0}^{\infty} g_i^{p'} q^{i(\alpha-1/p')} \sum_{i=j}^{\infty} q^{i(1/p'-\alpha)} \Big)^{1/p'}$$

$$\times \Big(\sum_{i=0}^{\infty} f^p(q^i) q^i q^{i(1/p'-\alpha)} \sum_{j=-\infty}^{i} q^{i(\alpha-1/p')} \Big)^{1/p}$$

$$= \sup_{\|g\|_p=1 g\geq 0} I_1(g) I_2(f)$$

elde edilir.

$p = 1$ ise bu durumda

$$\int_0^1 x^{\alpha-1} \int_0^x t^{-\alpha} f(t) \mathrm{d}_q t d_q x = (1-q)^2 \sum_{j=0}^{\infty} q^{j\alpha} \sum_{i=j}^{\infty} q^{i(1-\alpha)} f(q^i)$$

$$= (1-q)^2 \sum_{i=0}^{\infty} q^{i(1-\alpha)} f(q^i) \sum_{j=0}^{i} q^{j\alpha}$$

$$= (1-q)^2 \sum_{i=0}^{\infty} q^i f(q^i) \sum_{j=0}^{i} q^{-j\alpha}$$

$$< \frac{1}{[-\alpha]_q} \int_0^1 f(t) d_q t$$

bulunur.

Son eşitsizlik (3.9) eşitsizliğini verir.

(3.9) eşitsizliğindeki sabiti $\beta > -1/p$ olmak üzere

$$f_\beta(t) = t^\beta, \quad 0 < t < 1$$

test fonksiyonları kullanılarak bulunabilir. $p < 0$ olması durumunda (3.9) eşitsizliğinin ispatında F için Teorem 3.1.1 deki gibi benzer metot kullanılarak ispatlanabilir.

Gerçekten de

$$L(f) < \frac{(1-q)^{p+1}}{(1-q^{(p-1)/p-\alpha})^{p-1}} \sum_{i=0}^{\infty} f^p(q^i) q^{i(1+1/p'-\alpha)} \sum_{j=-\infty}^{i} q^{j(\alpha-1/p')}$$

$$= \frac{1}{[(p-1)/p-\alpha]_q^p} \int_0^1 f^p(t) \mathrm{d}_q t$$

elde edilir.

Bu da (3.9) eşitsizliğini gerçeklenir.

Aslında $\alpha - 1 < \beta < -1/p$ için $f_\beta(t) = t^\beta \chi_{(0,1]}(t)$ test fonksiyonlarından elde edilebilir. Dolayısıyla

$$\int_0^1 f_\beta^p(t) \mathrm{d}_q t = \frac{1-q}{1-q^{1+p\beta}}$$

$$:= F^-(\beta)$$

ve

$$L(f_\beta) = \int_0^1 x^{p(\alpha-1)} \Big(\int_0^x t^{-\alpha} f_\beta(t) \mathrm{d}_q t \Big)^p \mathrm{d}_q x$$

$$= (1-q)^{p+1} \sum_{i=0}^{\infty} q^{i(1+p(\alpha-1))} \Big(\sum_{j=i}^{\infty} q^{j(1-\alpha+\beta)} \Big)^p$$

$$> (1-q)^{p+1} \frac{1}{1-q^{1+p\beta}} \Big(\frac{1}{1-q^{1-\alpha+\beta}} \Big)^p$$

$$= \frac{1-q}{1-q^{1+p\beta}} \Big(\frac{1-q}{1-q^{1-\alpha+\beta}} \Big)^p$$

$$:= F^+(\beta)$$

Böylece $C > 0$, (3.9) eşitsizliğindeki sabit ise bu durumda

$$\begin{aligned} C &\geq \lim_{\beta \to -1/p} \frac{F^{+}(\beta)}{F^{-}(\beta)} \\ &= \frac{1}{[(p-1)/p-\alpha]_q^p} \end{aligned}$$

bulunur ve Teorem 3.1.3 ispatlanır. ■

Şimdi $0 < p < 1$ durumu için ek şartlar altında ters eşitsizliklerle ilgili teoremi verelim.

Teorem 3.1.4 $0 < p < 1$ ve $\alpha < (p-1)/p$ olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitsizlikler gerçeklenir:

$$\int_0^1 f^p(t)(1 - t^{(p-1)/p-\alpha})\mathrm{d}_q t < C \int_0^1 x^{p(\alpha-1)} \Big(\int_0^x t^{-\alpha} f(t)\mathrm{d}_q t \Big)^p \mathrm{d}_q x, \tag{3.10}$$

$$\int_0^1 f^p(t)\mathrm{d}_q t < C \int_0^1 \Big(1 + \frac{\chi_{(q,1]}(x)}{[(p-1)/p-\alpha]_q}\Big) x^{p(\alpha-1)} \Big(\int_0^x t^{-\alpha} f(t)\mathrm{d}_q t \Big)^p \mathrm{d}_q x \tag{3.11}$$

$f \geq 0$ için (3.11) eşitsizliğinin sağ tarafı $f \equiv 0$ değilse sonlu ve

$$C = \Big[\frac{p-1}{p} - \alpha\Big]_q^p \tag{3.12}$$

[20].

İspat. $f \geq 0$ ve

$$\int_0^1 f^p(t)\mathrm{d}_q t < \infty$$

olsun. $\gamma = (p-1)/p - \alpha$ ve $c_q = (1-q)(1-q^\gamma)$ tanımlarından

$$\int\limits_0^1 f^p(t)\mathrm{d}_q t = (1-q)\sum_{j=0}^{\infty} q^j f^p(q^j)$$

$$= c_q \sum_{j=0}^{\infty} q^j f^p(q^j) \sum_{i=-\infty}^{0} q^{-i\gamma}$$

$$= c_q \sum_{j=0}^{\infty} q^{j(1+\gamma)} f^p(q^j) \sum_{i=-\infty}^{j} q^{-i\gamma}$$

$$= c_q \sum_{j=0}^{\infty} q^{j(1+\gamma)} f^p(q^j) \sum_{i=0}^{j} q^{-i\gamma} + c_q \sum_{i=-\infty}^{-1} q^{-i\gamma} \sum_{j=0}^{\infty} q^{j(1+\gamma)} f^p(q^j)$$

$$= c_q \sum_{j=0}^{\infty} q^{j(1+\gamma)} f^p(q^j) \sum_{i=0}^{j} q^{-i\gamma} + (1-q)q^\gamma \sum_{j=0}^{\infty} q^{j(1+\gamma)} f^p(q^j)$$

$$< c_q \sum_{i=0}^{\infty} q^{-i\gamma} \sum_{j=i}^{\infty} q^{j(1+\gamma)} f^p(q^j) + (1-q) \sum_{j=0}^{\infty} q^{j(1+\gamma)} f^p(q^j)$$

$$:= I_1 + I_2$$

elde edilir.

$1/(1-p)$ ve $1/p$ kuvvetleri ile Hölder-Rogers eşitsizliğinden I_1;

$$I_1 = c_q \sum_{i=0}^{\infty} q^{-i\gamma} \sum_{j=i}^{\infty} q^{j(1-p)\gamma} q^{jp(1-\alpha)} f^p(q^j)$$

$$< c_q \sum_{i=0}^{\infty} q^{-i\gamma} (\sum_{k=i}^{\infty} q^{k\gamma})^{1-p} \Big(\sum_{j=i}^{\infty} q^{j(1-\alpha)} f(q^j) \Big)^p$$

$$= c_q (\frac{1}{1-q^\gamma})^{1-p} \sum_{i=0}^{\infty} q^{i(1+p(\alpha-1))} \Big(\sum_{j=i}^{\infty} q^{j(1-\alpha)} f(q^j) \Big)^p$$

$$= \Big(\Big[\frac{p-1}{p} - \alpha\Big]_q \Big)^p \int_0^1 x^{p(\alpha-1)} \Big(\int_0^x t^{-\alpha} f(t)\mathrm{d}_q t \Big)^p \mathrm{d}_q x.$$

Buradan

$$I_2 = (1-q)\sum_{j=0}^{\infty} q^{j(1+\gamma)} f^p(q^j)$$

$$= \int_0^1 t^{(p-1)/p-\alpha} f^p(t)\mathrm{d}_q t$$

(3.10) ifadesinden yukarıdaki hesaplamalardan

$$C \leq [(p-1)/p-\alpha]_q^p.$$

Şimdi (3.11) eşitsizliğini ispatlayalım. Bunun için I_2 ifadesinde, $1/(1-p)$ ve $1/p$ kuvvetleri ile Hölder-Rogers eşitsizliği kullanılarak

$$I_2 = (1-q)\sum_{j=0}^{\infty} q^{j(1-p)\gamma} q^{jp(1-\alpha)} f^p(q^j)$$

$$< (1-q)\Big(\sum_{k=0}^{\infty} q^{k\gamma}\Big)^{1-p}\Big(\sum_{j=0}^{\infty} q^{j(1-\alpha)} f(q^j)\Big)^p$$

$$= (1-q)(1-q^{\gamma})^{p-1}\Big(\sum_{j=0}^{\infty} q^{j(1-\alpha)} f(q^j)\Big)^p$$

$$= \Big[\frac{p-1}{p}-\alpha\Big]_q^{p-1}\Big(\int_0^1 t^{-\alpha} f(t)\mathrm{d}_q t\Big)^p$$

elde edilir.

Böylece tekrar yukarıdaki hesaplamalardan

$$\int_0^1 f^p(t)\mathrm{d}_q t < \Big[\frac{p-1}{p}-\alpha\Big]_q^p\Big[\int_0^1 x^{p(\alpha-1)}\Big(\int_0^x t^{-\alpha} f(t)\mathrm{d}_q t\Big)^p \mathrm{d}_q x$$

$$+ \frac{1}{[(p-1)/p-\alpha]_q}\Big(\int_0^1 x^{-\alpha} f(x)\mathrm{d}_q x\Big)^p\Big]$$

elde edilir.

Böylece (3.11) eşitsizliği (3.12) sabiti ile elde edilir.

Şimdi

$$[\gamma]_q^p = \left[\frac{(p-1)}{p-\alpha}\right]_q^p$$

sabitini (3.10) ve (3.11) eşitsizliklerinin her ikisinden göstermek mümkündür. Bunu göstermek için $\beta > -1/p$ olmak üzere $0 < t \leq 1$ için

$$f_\beta(t) = t^\beta$$

fonksiyonunu göz önüne alalım. Bu durumda

$$\int_0^1 t^{(p-1)/p-\alpha} f_\beta^p(t)\mathrm{d}_q t = \frac{1-q}{1-q^{1+p\beta+\gamma}}, \int_0^1 f_\beta^p(t)\mathrm{d}_q t$$

$$= \frac{1-q}{1-q^{1+p\beta}},$$

$$\int_0^1 x^{p(\alpha-1)}\Big(\int_0^x t^{-\alpha} f_\beta(t)\mathrm{d}_q t\Big)^p \mathrm{d}_q x = \Big(\frac{1-q}{1-q^{1-\alpha+\beta}}\Big)^p \frac{1-q}{1-q^{1+p\beta}},$$

ve

$$\frac{1}{[(p-1)/p-\alpha]_q}\Big(\int_0^1 t^{-\alpha} f_\beta(t)\mathrm{d}_q t\Big)^p = \frac{1}{[(p-1)/p-\alpha]_q}\Big(\frac{1-q}{1-q^{1-\alpha+\beta}}\Big)^p.$$

$C > 0$ ise (3.10) eşitsizliğindeki sabit ise bu durumda

$$C \geq \Big(\frac{1-q^{1-\alpha+\beta}}{1-q}\Big)^p \frac{1-q-(1-q^{1+p\beta})(1-q)/(1-q^{1+p\beta+\gamma})}{1-q},$$

ve $\beta \to -1/p$ olduğundan $C \geq [(p-1)/p-\alpha]_q^p$ bulunur. Dolayısıyla $C > 0$ ise (3.11) eşitsizliğindeki sabit ise bu durumda

$$C \geq \Big(\frac{1-q^{1-\alpha+\beta}}{1-q}\Big)^p \frac{1-q}{1-q+(1-q^{1+p\beta})/[(p-1)/p-\alpha]_q}.$$

Tekrar $\beta \to -1/p$ olduğundan $C \geq \big[(p-1)/p-\alpha\big]_q^p$ elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. ■

4 BAZI q-İNTEGRAL OPERATÖRLERİ VE UYGULAMALARI

Bu bölümde, Persson ve Shaimardan [24] tarafından $n \in \mathbb{N}$ de q-Riemann-Liouville operatörü ve q-kesirli integral operatörü için bazı Hardy tipli eşitsizliklerin q-analogunu ve negatif olmayan reel sayılarda bu eşitsizliklerin gerçeklendiği gerek ve yeter koşullar incelenmiştir.

4.1 q-Riemann-Liouville Operatörü

q-analiz de Γ_q fonksiyonu $x \in \mathbb{R}\backslash\{0, -1, -2, ...\}$ için

$$\Gamma_q(x) = \frac{(q;q)_\infty}{(q^x;q)_\infty}(1-q)^{1-x}$$

formuna sahiptir ve B_q fonksiyonu da

$$\begin{aligned} B_q(a,\ b) &= \int_0^1 t^{a-1}\ (qt;\ q)_{b-1} \mathrm{d}_q t \\ &= (1-q)\sum_{i=0}^{\infty} q^{ia}(q^{i+1};q)_{b-1} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır.

Γ_q ve B_q fonksiyonları için aşağıdaki eşitlikler gerçeklenir;

$$\Gamma_q(x+1) = [x]_q \Gamma_q(x)$$

ve

$$B_q(a,b) = \frac{\Gamma_q(a)\Gamma_q(b)}{\Gamma_q(a+b)}$$

[25].

Tanım 4.1.1 (**q-Riemann-Liouville operatörü**) $\alpha > 0$ için Riemann-Liouville operatörünün q-analogu

$$I_q^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma_q(\alpha)} \int\limits_0^x (x-qt)_q^{\alpha-1} f(t) \mathrm{d}_q t \tag{4.1}$$

şeklinde tanımlanır [25].

$$\int\limits_0^{\infty} \Big(\frac{1}{x^{\alpha}\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) \mathrm{d}t\Big)^p dx < \Big[\frac{\Gamma(1-1/p)}{\Gamma(\alpha+1-1/p)}\Big]^p \int\limits_0^{\infty} f^p(t) dt, \qquad f \geq 0 \tag{4.2}$$

eşitsizliğinin q-analogu ile ilgili teorem aşağıda verilmiştir.

Teorem 4.1.2 $p > 1$ ve $\alpha > 0$ ise bu durumda

$$\int\limits_0^{\infty} \Big[\frac{1}{x^{\alpha}\Gamma_q(\alpha)} \int\limits_0^x (x-qt)_q^{\alpha-1} f(t) d_q t\Big]^p d_q x \leq C \int\limits_0^{\infty} f^p(t) d_q t, \quad f \geq 0 \tag{4.3}$$

ve

$$C = \Big[\frac{\Gamma_q(1-1/p)}{\Gamma_q(\alpha+1-1/p)}\Big]^p \tag{4.4}$$

dir [25].

İspat. $f \geq 0$ olsun. (2.54), (2.18) ve (4.1) ifadelerinden

$$\begin{aligned} I_q^{\alpha} f(x) &= \frac{1}{\Gamma_q(\alpha)} \int\limits_0^x (x-qt)_q^{\alpha-1} f(t) d_q t \\ &= \frac{x^{\alpha}}{\Gamma_q(\alpha)} (1-q) \sum_{i=0}^{\infty} (q^{i+1};q)_{\alpha-1} f(xq^i) q^i \end{aligned} \tag{4.5}$$

elde edilir. Dolayısıyla (2.57) ve (4.5) ifadelerinden

$$\begin{aligned} \int\limits_0^{\infty} \Big(\frac{I_q^{\alpha} f(x)}{x^{\alpha}}\Big)^p \mathrm{d}_q x &= (1-q)\Big(\frac{1-q}{\Gamma_q(\alpha)}\Big)^p \sum_{j=-\infty}^{\infty} \Big(\sum_{i=0}^{\infty} (q^{i+1};q)_{\alpha-1} f(q^{i+j}) q^i\Big)^p q^j \\ &= (1-q)\Big(\frac{1-q}{\Gamma_q(\alpha)}\Big)^p \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{j(1-p)} \Big(\sum_{i=j}^{\infty} (q^{i-j+1};q)_{\alpha-1} f(q^i) q^i\Big)^p \\ &= (1-q)\Big(\frac{1-q}{\Gamma_q(\alpha)}\Big)^p (J_{\alpha})^p \end{aligned}$$

bulunur.

$l_p(\mathbb{Z})$ de çift prensibinden ve Tanım 2.1.15 (Hölder-Rogers eşitsizliği) den

$$J_{\alpha,p'}(g)^{p'} = \sum_j \sum_i g_j^{p'} q^{(i-j)/p'} \theta(i-j)(q^{i-j+1};q)_{\alpha-1}$$

ve

$$J_{\alpha,p}(f)^p = \sum_i \sum_j f^p(q^i) q^i q^{(i-j)/p'} \theta(i-j)(q^{i-j+1};q)_{\alpha-1}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
J_\alpha &= \sup_{\|g\|_{l_{p'}}=1,\quad g\geq 0} \quad \sum_{j=-\infty}^{\infty} g_j q^{-j/p'} \sum_{i=j}^{\infty} (q^{i-j+1};q)_{\alpha-1} f(q^i) q^i \\
&= \sup_{\|g\|_{l_{p'}}=1,\quad g\geq 0} \quad \sum_i g_j q^{(i-j)/p'} \theta(i-j)(q^{i-j+1};q)_{\alpha-1} f(q^i) q^{i/p} \\
&\leq \sup_{\|g\|_{l_{p'}}=1,\quad g\geq 0} \quad \Big(\sum_j \sum_i g_j^{p'} q^{(i-j)/p'} \theta(i-j)(q^{i-j+1};q)_{\alpha-1} \Big)^{1/p'} \\
&\times \Big(\sum_i \sum_j f^p(q^i) q^i q^{(i-j)/p'} \theta(i-j)(q^{i-j+1};q)_{\alpha-1} \Big)^{1/p} \\
&= \sup_{\|g\|_{l_{p'}}=1,\quad g\geq 0} \quad J_{\alpha,p'}(g) J_{\alpha,p}(f)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Beta ve gama fonksiyonları için formüllerden

$$
\begin{aligned}
\sup_{\|g\|_{l_{p'}}=1,\quad g\geq 0} J_{\alpha,p'}(g)^{p'} &= \sup_{\|g\|_{l_{p'}}=1,\quad g\geq 0} \sum_j \sum_i g_j^{P'} q^{(i-j)/p'} \theta(i-j)(q^{i-j+1};q)_{\alpha-1} \\
&= \sup_{\|g\|_{l_{p'}}=1,\quad g\geq 0} \sum_j g_j^{p'} \sum_{i=j}^{\infty} q^{(i-j)/p'} (q^{i-j+1};q)_{\alpha-1} \\
&= \sup_{\|g\|_{l_{p'}}=1,\quad g\geq 0} \sum_j g_j^{p'} \sum_{i=0}^{\infty} q^{i/p'} (q^{i+1};q)_{\alpha-1} \\
&= \frac{B_q(1/p';\alpha)}{1-q} \\
&= \frac{\Gamma_q(1-1/p)\Gamma_q(\alpha)}{\Gamma_q(\alpha+1-1/p)} \frac{1}{1-q}
\end{aligned} \tag{4.6}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
J_{\alpha,p}(f)^p &= \sum_i \sum_j f^p(q^i) q^i q^{(i-j)/p'} \theta(i-j)(q^{i-j+1};q)_{\alpha-1} \\
&= \sum_i f^p(q^i) q^i \sum_{j=-\infty}^{i} q^{(i-j)/p'} (q^{i-j+1};q)_{\alpha-1} \\
&= \sum_i f^p(q^i) q^i \sum_{j=0}^{\infty} q^{j/p'} (q^{j+1};q)_{\alpha-1} \\
&= \frac{1}{(1-q)^2} \frac{\Gamma_q(1-1/p)\Gamma_q(\alpha)}{\Gamma_q(\alpha+1-1/p)} \int_0^{\infty} f^p(t) d_q t
\end{aligned} \tag{4.7}
$$

olur.

Böylece $f \geq 0$ için (4.6) ve (4.7) eşitsizliklerinden

$$\int_0^\infty \Big(\frac{I_q^\alpha f(x)}{x^\alpha}\Big)^p \mathrm{d}_q x = \int_0^\infty \Big(\frac{1}{x^\alpha \Gamma_q(\alpha)} \int_0^x (x-qt)_q^{\alpha-1} f(t)\mathrm{d}_q t\Big)^p \mathrm{d}_q x$$

$$= (1-q)\Big(\frac{1-q}{\Gamma_q(\alpha)}\Big)^p (J_\alpha)^p$$

$$\leq (1-q)\Big(\frac{1-q}{\Gamma_q(\alpha)}\Big)^p \sup_{\|g\|_{l_{p'}}=1,\ \ g\geq 0} J_{\alpha,p'}(g)^p J_{\alpha,p}(f)^p$$

$$\leq (1-q)\Big(\frac{1-q}{\Gamma_q(\alpha)}\Big)^p \Big[\frac{\Gamma_q(1-1/p)\Gamma_q(\alpha)}{\Gamma_q(\alpha+1-1/p)}\frac{1}{1-q}\Big]^{p-1}$$

$$\times \frac{1}{(1-q)^2}\frac{\Gamma_q(1-1/p)\Gamma_q(\alpha)}{\Gamma_q(\alpha+1-1/p)} \int_0^\infty f^p(t)\mathrm{d}_q t$$

$$= \Big[\frac{\Gamma_q(1-1/p)}{\Gamma_q(\alpha+1-1/p)}\Big]^p \int_0^\infty f^p(t)\mathrm{d}_q t$$

elde edilir yani C sabiti için (4.3) eşitsizliğinden

$$C \leq \Big[\Gamma_q(1-1/p)/\Gamma_q(\alpha+1-1/p)\Big]^p \tag{4.8}$$

olduğu görülür.

Şimdi, (4.3) eşitsizliğinde C sabiti için (4.8) eşitsizliğinin tersini gösterelim. $\beta > -1/p$ için

$$f_\beta(t) = t^\beta \chi_{(0,1]}(t)$$

olsun. Buradan

$$\int_0^\infty f_\beta^p(t)\mathrm{d}_q t = (1-q)/(1-q^{1+p\beta})$$

($1 < p < \infty$ durumunda Teorem 3.1.1 in ispatından) ve

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\infty}\Big(\frac{I_q^{\alpha}f_\beta(x)}{x^{\alpha}}\Big)^p \mathrm{d}_q x &= \frac{(1-q)^{p+1}}{\Gamma_q^p(\alpha)}\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{j(1-p)}\Big(\sum_{i=j}^{\infty}(q^{i-j+1};q)_{\alpha-1}f_\beta(q^i)q^i\Big)^p \\
&\geq \frac{(1-q)^{p+1}}{\Gamma_q^p(\alpha)}\sum_{j=0}^{\infty} q^{j(1-p)}\Big(\sum_{i=j}^{\infty}(q^{i-j+1};q)_{\alpha-1}f_\beta(q^i)q^i\Big)^p \\
&= \frac{(1-q)^{p+1}}{\Gamma_q^p(\alpha)}\sum_{j=0}^{\infty} q^{j(1-p)}\Big(\sum_{i=j}^{\infty}(q^{i-j+1};q)_{\alpha-1}q^{i(1+\beta)}\Big)^p \\
&= \frac{(1-q)^{p+1}}{\Gamma_q^p(\alpha)}\sum_{j=0}^{\infty} q^{j(1+p\beta)}\Big(\sum_{i=0}^{\infty}(q^{i+1};q)_{\alpha-1}q^{i(1+\beta)}\Big)^p \\
&= \frac{1-q}{\Gamma_q^p(\alpha)(1-q^{1+p\beta})}B_q^p(\beta+1,\ \alpha)
\end{aligned}
$$

dır. O halde $C>0$ sabiti ile (4.3) eşitsizliği sağlanırsa bu durumda

$$
\begin{aligned}
C &\geq \sup_{\beta>-1/p}\Big(\frac{B_q(\beta+1,\alpha)}{\Gamma_q(\alpha)}\Big)^p \\
&= \Big(\frac{B_q(1-1/p,\alpha)}{\Gamma_q(\alpha)}\Big)^p \\
&= \Big(\frac{\Gamma_q(1-1/p)}{\Gamma_q(\alpha+1-1/p)}\Big)^p
\end{aligned}
$$

olur ve bu da (4.4) sabitinin doğru olduğunu gösterir.

■

4.2 q-Kesirli İntegral Operatörü

Tanım 4.2.1 $\alpha+\beta<\gamma, \quad \gamma\neq 0,-1,-2,\cdots$ olsun. Genelleştirilmiş kesirli integral operatörü

$$I_\alpha^{\gamma,\beta}f(x)=\frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^x {}_2F_1(\alpha-1,\ \beta;\gamma;\frac{s}{x})ds \tag{4.9}$$

şeklinde tanımlanır [22].

$\beta=\gamma$ ise bu durumda Riemann-Liouville kesirli integral operatörü

$$I_\alpha f(x):=\frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^x {}_2F_1(\alpha-1,\ \beta;\beta;\frac{s}{x})ds$$

şeklinde tanımlanır.

$\gamma=1,\beta=2$ olduğunda

$$\widehat{I}f(x):=\lim_{\alpha\to 0}\Gamma(\alpha)I_\alpha^{1,2}f(x)=\int\limits_0^x \ln\frac{x}{x-s}\frac{f(s)}{s}ds \tag{4.10}$$

ifadesine en temel kesirli integral operatörü denir [1].

Riemann-Liouville tipli kesirli integral operatörünün q-analogu

$$I_{q,\alpha}f(x)=\frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma_q(\alpha)}\int\limits_0^x(1-\frac{qs}{x})_q^{\alpha-1}f(s)d_qs,\ \alpha\in\mathbb{R}^+$$

olmak üzere (2.28) ifadesini kullanarak,

$$I_{q,\alpha}f(x)=\frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma_q(\alpha)}\int\limits_0^x\frac{f(s)}{(1-q^\alpha\frac{s}{x})_q^{1-\alpha}}d_qs,\ \alpha\in\mathbb{R}^+ \tag{4.11}$$

şeklinde yazılır [2, 3, 4].

Tanım 4.2.2 $0<s<x<1$ olsun. $\ln\frac{x}{x-s}$ fonksiyonunun q-analogu

$$\ln_q\frac{x}{x-s}:=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(\frac{s}{x})^j}{[j]_q}$$

[25].

Tanım 4.2.3 (**q-kesirli integral operatörü**) (4.10) ifadesinin q-analogu olan en temel q-kesirli integral operatörü

$$\hat{I}_q f(x) \ := \int_0^{qx} \ln_q \frac{x}{x-s} \frac{f(s)}{s} d_q s \tag{4.12}$$

şeklinde tanımlanır.

(4.12) ifadesinden

$$\lim_{q \to 1} \hat{I}_q f(x) = \int_0^{x} \ln \frac{x}{x-s} \frac{f(s)}{s} ds \tag{4.13}$$

elde edilir. Böylece f den bağımsız bir $C > 0$ için (4.13) eşitliğinden (4.10) ifadesinin q-analogu

$$\int_0^{\infty} u^r(x)(\hat{I}_q f(x))^r d_q x)^{\frac{1}{r}} \leq C \Big(\int_0^{\infty} f^p(t) d_q t \Big)^{\frac{1}{p}}, \ \forall f(.) \geq 0 \tag{4.14}$$

şeklinde ifade edilir [25].

Aşağıdaki teoremleri ispatsız olarak verelim.

Teorem 4.2.4 $0 < r < p < \infty$, $1 < p$ ve $\gamma > \frac{1}{p}$ olsun. Bu durumda f den bağımsız bir $C > 0$ için

$$\Big(\int_0^{\infty} u^r (x \Big(\int_0^{x} s^{\gamma-1} ln_q \frac{x}{x-qs} f(s) d_q s \Big)^r d_q x \Big)^{\frac{1}{r}} \leq C \Big(\int_0^{\infty} f^p(s) d_q s \Big)^{\frac{1}{p}}. \quad \forall f(.) \geq 0 \tag{4.15}$$

olması için gerek ve yeter şart

$$B_2 := \Big(\int_0^{\infty} \Big[x^{\gamma + \frac{1}{p}} \Big(\int_0^{\infty} \mathcal{X}_{[x,\infty)}(t) \frac{u^r(t)}{t^r} d_q t \Big)^{\frac{1}{r}} \Big]^{\frac{p-}{p-r}} d_q x \Big)^{\frac{p-r}{pr}}$$

olmak üzere $B_2 < \infty$ olmasıdır.

Dolayısıyla (4.15) ifadesindeki $C > 0$ sabiti olmak üzere $B_1 \approx C$ [25].

Teorem 4.2.5 $1 < p \leq r < \infty, \quad \gamma > \frac{1}{p}$ olsun. Bu durumda f den bağımsız bir $C > 0$ için

$$\int\limits_0^\infty u^r(x)\Big(\int\limits_0^x s^{\gamma-1}\ln_q \frac{x}{x-qs} f(s)d_qs\Big)^r d_qx)^{\frac{1}{r}} \tag{4.16}$$

$$\leq C\Big(\int\limits_0^\infty f^p(s)d_qs\Big)^{\frac{1}{p}}, \ \forall f(.) \geq 0$$

olması için gerek ve yeter şart

$$B_1 := \sup_{x>0} x^{\gamma+\frac{1}{p}}\Big(\int\limits_0^\infty \mathcal{X}_{[x,\infty)}(t)\frac{u^r(t)}{t^r}d_qt\Big)^{\frac{1}{r}}$$

olmak üzere $B_1 < \infty$ olmasıdır.

Dolayısıyla (4.15) ifadesindeki $C > 0$ sabiti olmak üzere $B_1 \approx C$ [25].

KAYNAKLAR

[**1**] Abylaeva, A.M., Omirbek, M.Zh.; *A weighted estimate for an integral operator with a logarithmic singularity.* (Russian) Izv. Nats. Akad. Nauk Resp. Kaz. Ser. Fiz.-Mat., 1, **(2005)**, 38-47.

[**2**] Agarwal, R.P.; *Certain fractional q-integrals and q-derivatives.* Proc. Camb. Phil. Soc., 66, **(1969)**, 365-370.

[**3**] Al-Salam, W.A.; *Some fractional q-integrals and q-derivatives.* Proc. Edinb. Math. Soc., 15, **(1966/1967)**, 135-140.

[**4**] Annaby, M.H., Mansour, Z.S.; *q-Fractional Calculus and Equations.* Springer, Heidelberg, **(2012)**.

[**5**] Aral, A., Gupta, V., Agarwal, R.P.; *Applications of q-Calculus in Operator Theory.* Springer, NewYork, **(2013)**.

[**6**] Baiaristanov, A.O., Shaimardan, S., Temirkhanova, A.; *Weighted Hardy inequalities in quantum analysis.* Vestin. KarGU, Math. Ser., 70, **(2013)**, 35-45.

[**7**] Baıarystanov, A.O., Persson, L.E., Shaimardan, S.A., Temırkhanova, A.; *Some new Hardy-tpye inequalities in q-analysis.* J. Math. Ineq., 10, 3, **(2016)**, 761-781.

[**8**] Bangerezako, G.; *Variational calculus on q-nonuniform lattices.* J. Math. Anal. Appl., 306, **(2005)**, 161-179.

[**9**] Bennett, G.; *Some elementary inequalities.* Quart. J. Math. Oxford Ser. ,38 no. 152, **(1987)**, 401-425.

[**10**] Ernst, T.; *The history of q-calculus and a new method.* PhD thesis, Uppsala University, **(2001)**.

[**11**] Ernst, T.; *A Comprehensive Treatment of q-Calculus.* Birkhäuser, Basel , **(2012)**.

[**12**] Exton, H.; *q-Hypergeometric Functions and Applications.* Ellis Horwood Series in Mathematics and Its Applications, Halsted Press, Chichester, **(1983)**.

[**13**] Gasper, G., Rahman, M.; *Basic hypergeometric series.* Cambridge, **(1990)**.

[**14**] Gauchman, H.; *Integral inequalities in q-calculus.* Comput. Math. Appl., 47, no. 2-3, **(2004)**, 281-300.

[**15**] Hölder, O.; *Über einen Mittelwertsatz.* Göttingen Nachr., **(1889)**, 38-47.

[**16**] Jackson, F.H.; *On q-definite integrals. Q. J. Pure Appl. Math.*, 41, **(1910)**, 193-203 .

[**17**] Kac, V., Pokman, C.; *Quantum Calculus.* Springer, New York, **(2002)**.

[**18**] Krasniqi, V.; *Several q-integral inequalities.* J. Math. Inequal. 5(3), **(2011)**, 451.

[**19**] Kufner, A., Maligranda, L., Persson, L.E.; *The Hardy inequality. About its history and some related results.* Vydavatelský Servis, Plzeň, **(2007)**.

[**20**] Maligranda, L., Oinarov, R., Persson, L.E.; *On Hardy q-inequalities.* Czechoslov. Math. J., 64, **(2013)**, 659-682.

[**21**] Miao, Y., Qi, F.; *Several q-integral inequalities.* J. Math. Inequal. 3, **(2009)**, 115-121.

[**22**] Nakhushev, A.M.; *Equations of mathematical biology.* Vysshaya shkola,(in Russian), **(1995)**.

[**23**] Oney, S.; *The Jackson integral.* University of Michigan, USA, **(2007)**, 1-10.

[**24**] Persson, L.E., Shaimardan, S.; *Some new Hardy-tpye inequalities for Riemann-Liouvilli fractional q-integral operator.* J. Ineq. App., 2015:296 **(2015)**, 1-17.

[**25**] Shaimardan, S.; *Hardy-type inequalities for the fractional integral operator in q-analysis.* Eurasian Math. J., (**2016)**, Volume 7, Number 1, 84-99.

[**26**] Stankovi´c, M. S., Rajkovi´c, P.M., Marinkovi´c, S.D.; *On q-fractional derivatives of Riemann-Liouville and Caputo type.* arXiv Preprint arXiv:0909.0387, **(2009)**, 1-15.

[**27**] Sulaiman, WT.; *New types of q-integral inequalities.* Adv. Pure Math., 1, **(2011)**, 77-80 .

ÖZGEÇMİŞ

Adı ve Soyadı	:	Kemal KURT
Doğum Yeri	:	Elbistan-KAHRAMANMARAŞ
Doğum Tarihi	:	22.04.1989
Medeni Hali	:	Evli
Yabancı Dili	:	İngilizce
Eğitim Durumu		**(Kurum ve Yıl)**
Yüksek Lisans	:	Ahi Evran Üniversitesi Fen-Bilimler Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı (Eylül 2015 - ...)
Lisans	:	Ahi Evran Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü (Haziran 2015)
Lise	:	Elbistan Mükrimin Halil Lisesi (Haziran 2007)
Ortaokul	:	Cumhuriyet İlköğretim Okulu (Haziran 2002)
İlkokul	:	Cumhuriyet İlköğretim Okulu (Haziran 1997)