T.C.
AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN VARYASYONEL İTERASYON METODU İLE YAKLAŞIK ANALİTİK ÇÖZÜMLERİ

ESİN İLHAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

KIRŞEHİR
TEMMUZ - 2011

T.C.
AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN VARYASYONEL İTERASYON METODU İLE YAKLAŞIK ANALİTİK ÇÖZÜMLERİ

ESİN İLHAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

DANIŞMAN:
YRD. DOÇ. DR. İ. ONUR KIYMAZ

KIRŞEHİR
TEMMUZ - 2011

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü'ne

Bu çalışma jürimiz tarafından MATEMATİK Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Başkan: Doç. Dr. Mahir KADAKAL
Akademik Ünvanı, Adı-Soyadı

Üye: Yrd. Doç. Dr. İ. Onur KIYMAZ
Akademik Ünvanı, Adı-Soyadı

Üye: Yrd. Doç. Dr. Muharrem AKTÜMEN
Akademik Ünvanı, Adı-Soyadı

Onay
Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

.../.../20..

Doç. Dr. Mustafa KURT
Enstitü Müdürü

ÖZET

Bu tezde, lineer ve lineer olmayan pek çok türde adi ve kısmi diferensiyel denklemlere başarıyla uygulanmış bir analitik yaklaşım tekniği olan varyasyonel iterasyon metodu ele alınmıştır. Yöntemle ilgili literatür taranmış ve seçilen bazı çalışmalar hakkında açıklayıcı bilgiler verilmiştir. Ayrıca metod çeşitli örneklere uygulanmış ve elde edilen sonuçlar analitik çözümlerle karşılaştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Lineer olmayan diferensiyel denklemler, başlangıç değer problemi, sınır değer problemi, yaklaşık analitik çözüm, varyasyonel iterasyon metodu.

ABSTRACT

In this thesis, variational iteration method, which is an analytic approximation technique that successfully applied various kinds of linear and nonlinear ordinary and partial differential equations, were discussed. A literature review was performed and descriptive information about some of these studies were given. Besides, the method was applied to different examples and the obtained results were compared with analytical solutions.

Keywords: Nonlinear differential equations, initial value problem, boundary value problem, approximate analytic solution, variational iteration method.

TEŞEKKÜR

Tez çalışmam süresince büyük yardımlarını gördüğüm, bilgi ve deneyimlerinden yararlandığım danışmanım sayın Yrd. Doç. Dr. İ. Onur KIYMAZ'a, tezimin her aşamasında değerli yardımlarını esirgemeyen sayın Doç. Dr. Mahir KADAKAL'a içtenlikle teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

ŞEKİLLER DİZİNİ

1 GİRİŞ

Mühendislik ve fiziki bilimlerin birçok alanında ortaya çıkan problemlerin matematiksel modelleri, nonlineer diferensiyel denklemler içerir. Bu sebeple nonlineer diferensiyel denklemlerin analitik veya sayısal çözümlerinin elde edilebilmesi son derece önemlidir. Bu tür denklemlerin, çok sınırlı sayıda olanları hariç büyük bir çoğunluğunun analitik çözümleri bulunamaz. Bu yüzden nonlineer denklemlerin çözümleri sayısal yöntemler ya da analitik yaklaşım yöntemleri kullanılarak hesaplanabilmektedir.

Nonlineer problemlerin yaklaşık çözümlerini bulmak için çok çeşitli sayısal ve analitik yaklaşım metodları geliştirilmiştir. Ancak sayısal yöntemler, genel çözüm hakkında yeterli bilgi vermediğinden analitik yaklaşım metodları ön plana çıkmıştır. Bu metodlardan en bilineni perturbasyon metodudur. Bu metod *perturbasyon miktarı* olarak adlandırılan küçük parametrelerin varlığına dayanır. Ancak pek çok nonlineer problem bu tür parametreler içermez. Bu gibi durumlarda Lyapunov yapay parametre yöntemi ve δ-açılım yöntemi en çok kullanılan yöntemlerden bazılarıdır.

Yukarıda saydığımız yöntemlerde denklemlerin küçük parametreler içermesi gerekmez. Bu yöntemlerde denklemin farklı yerlerine eklenen yapay parametreler kullanılır. Ancak bu parametreleri denkleme yerleştirmek son derece teknik bir iştir ve çoğu zaman yakınsama yavaş olur ya da hiç yakınsama olmaz. Ayrıca bu yöntemler yakınsaklık aralığını ayarlamaya izin vermez ve nonlineerlik güçlü ise yaklaşım bozulabilir.

Bu yöntemler dışında, nonlineerlik güçlü de olsa yaklaşık analitik çözüm bulabilen bir başka yöntem daha vardır: Adomian ayrıştırma yöntemi. Çözüme hızlı yakınsayan bu yöntem yaklaşım fonksiyonları olarak polinomları kullanır. Her türden probleme uygulanabilen bu yöntemin de bazı kısıtlamaları mevcuttur. Bunlardan en önemlisi yakınsama aralığının darlığıdır. Bunun sebebi olarak yaklaşım fonksiyonlarının polinomlar olması gösterilebilir.

He, 2000 yılında geliştirdiği homotopi perturbasyon metodu ile tüm bu güçlükleri ortadan kaldırmıştır. Bu yöntem kullanılarak çok çeşitli nonlineer problemlerin yaklaşık çözümleri elde edilmiştir. Bu yöntem topolojinin temel kavramlarından biri olan homotopi kavramını ve klasik perturbasyon metodunu kullanarak oluşturulmuştur. Bu yöntem de perturbasyon yöntemleri gibi parametre içerir. Ancak bu parametreyi denkleme yerleştirmek oluşturulan homotopi sayesinde son derece kolaydır. Gömülü parametre denkleme yerleştirildikten sonra klasik perturbasyon metodu kullanılarak yaklaşık analitik çözüme ulaşılabilir.

Bu çalışmanın konusu olan *varyasyonel iterasyon metodu* ise homotopi perturbasyon metodundan daha önce geliştirilmiş bir metottur. Aynı homotopi perturbasyon metodunda olduğu gibi bu yöntem de önceki yöntemlerin sahip olduğu kısıtlamaları ortadan kaldırır. Her türlü probleme uygulanabilir ve yaklaşımı hızlıdır. Diğer tüm yöntemlerin aksine uygulanacağı problemlerin küçük parametreler içermesi ya da dışarıdan eklenmesi gerekmez. Bu yöntemde genel bir Lagrange çarpanı ile oluşturulan düzeltme fonksiyoneli kullanılır. Başlangıç koşullarından yola çıkarak sürekli yinelemeler sonucu yaklaşık analitik çözüm oluşturulur.

Tezin ilk bölümü giriştir. İkinci bölümde, varyasyonel analiz hakkında çok temel bilgiler verilmiştir. Üçüncü bölüm, varyasyonel iterasyon metodunun teorik altyapısı hakkındadır. Yine aynı bölüm içerisinde literatürde yer alan çalışmalardan bazılarına kısaca değinilmiştir. Dördüncü bölümde ise ele alınan yöntemin çok çeşitli problemlere uygulamalarına örnekler verilmiştir. Elde edilen sonuçlar tezin son bölümünde değerlendirilmiştir.

2 TEMEL BİLGİLER

Bu bölümde, varyasyonel iterasyon metodunun daha iyi anlaşılabilmesi için yöntem içerisinde geçen bazı temel varyosyonel analiz konularına kısaca değinilecektir.

Varyasyonel analiz basitce fonksiyoneller ile ilgilenir. Bir fonksiyonel kabaca bir fonksiyonun fonksiyonları olarak düşünülebilir. Örneğin;

$$I[y(x)] = \int_0^{\pi} [y(x)]^2 dx$$

bir fonksiyoneldir ve genellikle köşeli parantezler ile gösterilir. Bir fonksiyon sayıların bir kümesinden bir değere tanımlanan bir dönüşümken, bir fonksiyonel fonksiyonların bir kümesinden bir değere tanımlanan bir dönüşümdür. Belirli integraller bir fonksiyonu bir değere dönüştürdüğünden fonksiyoneller genellikle integral içerir.

Varyasyonel analizin çalışma alanlarından biri de bir fonksiyoneli maksimize ya da minimize eden fonksiyonu belirlemektir. Varyasyonel analizde sıklıkla kullanılan bir fonksiyonel $y'(x) = \frac{dy}{dx}$ olmak üzere

$$I[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y(x), y'(x))dx \tag{2.1}$$

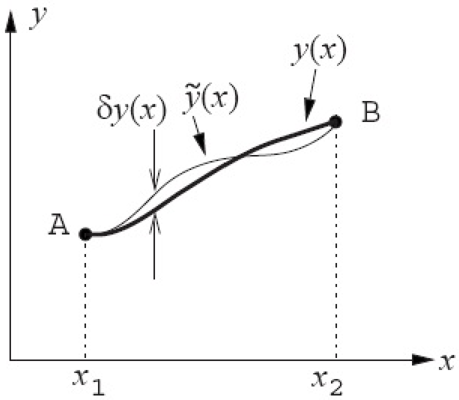
biçimindedir. Amaç bu fonksiyoneli

$$y(x_1) = a, \;\; y(x_2) = b$$

sınır koşulları altında maksimize (yada minimize) eden y fonksiyonunu bulmaktır.

Bir y fonksiyonu için dy diferensiyeli, x değişkeni dx kadar değiştiğinde y fonksiyonunun ne kadar değiştiğini gösterir. Eğer x değişkeni maksimum (ya da minimum) değerini alıyorsa değişim olmayacağından $dy = 0$ olacaktır.

Benzer şekilde $I[y(x)]$ fonksiyoneli için y fonksiyonu δy kadar değiştiğinde I fonksiyonelinin ne kadar değiştiği (varyasyonu) δI ile gösterilir. Bu değişim Şekil 2.1 de görselleştirilmiştir.



Şekil 2.1: Fonksiyon, küçük varyasyonu ve sınır koşullarını sağlayan değişim.

Eğer y fonksiyonu δy küçük, sürekli bir fonksiyon olmak üzere

$$\widetilde{y}(x) = y(x) + \delta y(x)$$

kadar değişiyorsa, fonksiyonelin varyasyonu

$$\delta I = I[\widetilde{y}(x)] - I[y(x)]$$

olacaktır. Burada amaç δI ifadesini elde etmektir.

Varsayalım ki (2.1) fonksiyoneli verilsin. δI değerini bulmak için ϵ sonsuz küçük bir değer ve ϕ keyfi sürekli bir fonksiyon olmak üzere

$$\delta y(x) = \epsilon\phi(x)$$

varyasyonunu tanımlayalım. Buradan, $I[\widetilde{y}(x)]$ ifadesinin ϵ cinsinden Taylor açılımı kullanılarak

$$\begin{aligned} I[\widetilde{y}(x)] &= \int_{x_1}^{x_2} F(x, y(x) + \epsilon\phi(x), y'(x) + \epsilon\phi'(x))dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \left[F(x, y(x), y'(x)) + \frac{dF}{dy}\epsilon\phi(x) + \frac{dF}{dy'}\epsilon\phi'(x) + \mathcal{O}(x^2) \right] dx \\ &= I[y(x)] + \epsilon \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{dF}{dy}\phi(x) + \frac{dF}{dy'}\phi'(x) \right] dx + \mathcal{O}(x^2) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned}\delta I &= \epsilon\int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{dF}{dy}\phi(x)+\frac{dF}{dy'}\phi'(x)\right]dx\\ &= \int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{dF}{dy}\delta y(x)+\frac{dF}{dy'}\delta y'(x)\right]dx\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Ayrıca kısmi integrasyon uygulanarak

$$\begin{aligned}\delta I &= \epsilon\int_{x_1}^{x_2}\frac{dF}{dy}\phi(x)dx+\epsilon\int_{x_1}^{x_2}\frac{dF}{dy'}\phi'(x)dx\\ &= \epsilon\int_{x_1}^{x_2}\frac{dF}{dy}\phi(x)dx+\epsilon\left[\frac{dF}{dy'}\phi(x)\right]_{x_1}^{x_2}-\epsilon\int_{x_1}^{x_2}\frac{d}{dx}\left(\frac{dF}{dy'}\right)\phi(x)dx\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan sınır koşulları

$$\phi(x_1)=\phi(x_2)=0$$

yardımıyla,

$$\begin{aligned}\delta I &= \epsilon\int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{dF}{dy}-\frac{d}{dx}\left(\frac{dF}{dy'}\right)\right]\phi(x)dx\\ &= \int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{dF}{dy}-\frac{d}{dx}\left(\frac{dF}{dy'}\right)\right]\delta y(x)dx\end{aligned}$$

bulunur. Böylece eğer y fonksiyonu $I[y(x)]$ fonksiyonelinin maksimumu (ya da minimumu) ise $\delta I = 0$ olacaktır. Bu ise y fonksiyonunun $x \in (x_1, x_2)$ aralığında

$$\frac{dF}{dy}-\frac{d}{dx}\left(\frac{dF}{dy'}\right)=0 \tag{2.2}$$

diferensiyel denklemini sağlamasi ile mümkündür. (2.2) denklemine *Euler-Lagrange Denklemi* denir.

Kullanımına örnek vermek amacıyla A ve B noktalarını birleştiren en kısa yolu bulmaya çalışalım. Açıkça, bu yol iki noktayı birleştiren bir doğrudur. Bu sonuca, varyasyonel analiz kullanarak ulaşalım. A ve B noktalarını birleştiren bir y eğrisi alalım. Bu eğrinin uzunluğu

$$I[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y(x), y'(x))dx = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx$$

olacaktır. I, y fonksiyonunun bir fonksiyonelidir ve I fonksiyonelinin minimumu Euler-Lagrange denklemini sağlamalıdır. Ayrıca, F açıkca x ya da y ifadesine bağlı olmadığından

$$\frac{dF}{dy} = 0 \quad \text{ve} \quad \frac{dF}{dy'} = \frac{y'(x)}{\sqrt{1 + [y'(x)]^2}}$$

olarak alınabilir. Böylece, Euler-Lagrange denklemi

$$-\frac{d}{dx}\left(\frac{y'(x)}{\sqrt{1 + [y'(x)]^2}}\right) = 0$$

olarak elde edilir. Bu denklemin çözümünden c keyfi bir sabit olmak üzere

$$y'(x) = c$$

elde edilir ki bu y fonksiyonunun bir doğru olduğunu gösterir.

Varyasyonel analiz hakkında daha ayrıntılı bilgi almak isteyen okurlar için [1,2] kaynaklarını önerebiliriz.

3 VARYASYONEL İTERASYON METODU

1978 yılında, Inokuti ve arkadaşları, nonlineer denklemlerin çözümü için genel bir Lagrange çarpanı metodu önermişlerdir [3]. Bu metot, L lineer, N nonlineer operatör olmak üzere

$$Lu + Nu = f(x) \tag{3.1}$$

genel nonlineer denkleminin x_0 noktasındaki değerini düzeltmek için u_0, $Lu = 0$ denkleminin çözümü olmak üzere,

$$u_c(x_0) = u_0(x_0) + \int_a^b \lambda \left(Lu_0(x) + Nu_0(x) - f \right) dx \tag{3.2}$$

düzeltme formülünü yazabileceğimizi söyler. Burada λ genel Lagrange çarpanıdır ve varyasyonel analiz yöntemleri kullanılarak hesaplanabilir. Varyasyonel iterasyon metodu, bu metodun He tarafından geliştirilmesiyle elde edilmiştir [4-10]. He, (3.2) denklemini, u_0 fonksiyonunu ilk yaklaşım olarak alarak

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) + \int_0^x \lambda \left(Lu_n(s) + N\widetilde{u}_n(s) - f(s) \right) ds \tag{3.3}$$

biçiminde bir iterasyon metoduna dönüştürmüştür. Burada u_n, n. yaklaşık çözüm, $\widetilde{u}_n$ ise kısıtlanmış varyasyondur. Yani $\delta\widetilde{u}_n = 0$ olacaktır. Ayrıca (3.3) denklemine *düzeltme fonksiyoneli* adı verilir. Bu fonksiyonele varyasyon uygularsak $\delta u_n(0) = 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \delta u_{n+1}(x) &= \delta u_n(x) + \delta \int_0^x \lambda(x,s) \left(Lu_n(s) + N\widetilde{u}_n(s) - f(s) \right) ds \\ &= \delta u_n(x) + \int_0^x \delta\lambda(x,s) \left(Lu_n(s) - f(s) \right) ds \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde ederiz. Buradan, oluşan Euler-Lagrange problemi çözülerek Lagrange çarpanı $\lambda(x,s)$ belirlenir. Ardından, başlangıç koşullarını sağlayacak şekilde bir u_0 ilk yaklaşım fonksiyonu seçilir ve bu değerler (3.3) iterasyon formülünde yerlerine yazılarak $u_n,\ n = 1, 2, \ldots$ yaklaşımları bulunur. Sonuç olarak çözüm $u = lim_{n\to\infty} u_n$ ile verilir.

Metodun işleyişini anlayabilmek için aşağıdaki lineer problemin çözümünü, varyasyonel iterasyon metodunu kullanarak bulalım:

Örnek 3.1

$$\begin{cases} u'' + u = \cos t \\ u(0) = 1, u'(0) = 0 \end{cases}$$

sabit katsayılı lineer homojen olmayan başlangıç değer problemini ele alalım. Bu denkleme karşılık gelen düzeltme fonksiyoneli

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) + \int_0^t \lambda(t,s) \left\{ u_n''(s) + \widetilde{u}_n(s) - \cos s \right\} ds \tag{3.4}$$

biçiminde yazılabilir. Bu fonksiyoneli kararlı yapmak için varyasyon uygulanırsa

$$\begin{aligned}
\delta u_{n+1}(t) &= \delta u_n(t) + \delta \int_0^t \lambda(t,s) \left\{ u_n''(s) - \cos s \right\} ds \\
&= \delta u_n(t) + \int_0^t \left\{ \left[\frac{\partial^2}{\partial s^2} \lambda(t,s) \right] \delta u_n(s) \right\} ds \\
&- \left. \frac{\partial}{\partial s} \lambda(t,s) \delta u_n(s) \right|_{s=t} + \left. \lambda(t,s) \delta u_n'(s) \right|_{s=t} \\
&= \left(1 - \left. \frac{\partial}{\partial s} \lambda(t,s) \right|_{s=t} \right) \delta u_n(t) + \left. \lambda(t,s) \right|_{s=t} \delta u_n'(t) \\
&+ \int_0^t \left\{ \left[\frac{\partial^2}{\partial s^2} \lambda(t,s) \right] \delta u_n(s) \right\} ds = 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan Euler-Lagrange denklemi

$$\frac{\partial^2}{\partial s^2} \lambda(t,s) = 0$$

ve başlangıç koşulları

$$\left. \lambda(t,s) \right|_{s=t} = 0,\ 1 - \left. \frac{\partial}{\partial s} \lambda(t,s) \right|_{s=t} = 0$$

biçiminde bulunur. Bu problem çözülerek

$$\lambda(t,s) = s - t$$

sonucuna ulaşılır. Lagrange çarpanı (3.4) denkleminde yerine yazılarak iterasyon formülü,

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) + \int_0^t (s-t)\left\{u_n''(s) + u_n(s) - \cos s\right\} ds \qquad (3.5)$$

olarak belirlenir. İlk yaklaşım fonksiyonu a, b sabitler olmak üzere

$$u_0(t) = at + b$$

şeklinde alınabilir. İlk yaklaşım fonksiyonunun problemin başlangıç koşullarını sağlaması gerektiğinden,

$$a = 0, \;\; b = 1$$

bulunur. O halde

$$u_0(t) = 1$$

olmalıdır. Böylece (3.5) iterasyon formülünden ikinci yaklaşım,

$$\begin{aligned} u_1(t) &= u_0(t) + \int_0^t (s-t)\left\{u_0''(s) + u_0(s) - \cos s\right\} ds \\ &= 1 + \int_0^t (s-t)\left\{1 - \cos s\right\} ds \\ &= 2 - \frac{t^2}{2} - \cos t \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Üçüncü yaklaşım fonksiyonu u_2, (3.5) iterasyon formülünde u_1 fonksiyonunun yerine yazılmasıyla elde edilir. Ancak burada u_1 fonksiyonundaki $\cos t$ ifadesi yerine $x = 0$ noktası civarındaki seri açılımının ilk birkaç terimini almak, sonraki hesaplamaları kolaylaylaştıracaktır. O halde,

$$u_1(t) = 2 - \frac{t^2}{2} - \left(1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} - \frac{t^6}{720}\right) = 1 - \frac{t^4}{24} + \frac{t^6}{720}$$

alalım. Buradan hesaplamalara devam edilerek

$$\begin{aligned} u_2(t) &= 1 - \frac{t^4}{24} + \frac{t^6}{720} - \frac{t^8}{20160} \\ u_3(t) &= 1 - \frac{t^4}{24} + \frac{t^6}{720} - \frac{t^8}{13440} \end{aligned}$$

sonucu elde edilir. Bu sonuç problemin analitik çözümü olan

$$u(t) = \cos t + \frac{t}{2}\sin t$$

fonksiyonunun seri açılımının ilk dört terimiyle aynıdır.

Metot, kullanıcısını ilk yaklaşım fonksiyonunu seçmekte özgür bırakır. Örneğin bu problemde ilk yaklaşım olarak istersek problemin homojen kısmının çözümü olan

$$u_0^*(t) = \cos t$$

fonksiyonunu da alabiliriz. Bu durumda

$$\begin{aligned} u_1^*(t) &= u_0^*(t) + \int_0^t (s-t)\left\{u_0^{*\prime\prime}(s) + u_0^*(s) - \cos s\right\} ds \\ &= \cos t - \int_0^t (s-t)\left\{\cos s\right\} ds \\ &= \cos t - \cos t + 1 = 1 \end{aligned}$$

olarak bulunur. Dikkat edilirse

$$u_1^*(t) = u_0(t)$$

olarak bulundu. Yani, ilk yaklaşım fonksiyonunun bu seçimi, sonuca yaklaşımı bir adım geciktirmiş oldu. Ancak bu her problemde böyle olacağı anlamına gelmemelidir. İlk yaklaşım fonksiyonunun seçimi, yaklaşımı olumlu olarak da etkileyebilir.

Ayrıca varyasyonel iterasyon metodunun başarısı, u_0 ilk yaklaşım fonksiyonunun seçimi kadar Lagrange çarpanının belirlenmesine de bağlıdır. Aslında, Lagrange çarpanı, denklemde yer alan en yüksek mertebeli türev hariç, diğer tüm terimlere kısıtlı varyasyon uygulanarak genellenebilir. Bunun için

$$\frac{d^m u}{dx^m} + Lu + Nu = f(x)$$

diferensiyel denklemini ve $y^{(k)}(x_0) = y_k,\ k = 0, 1, 2, \ldots, m$ genel başlangıç koşullarını ele alalım. Buradan düzeltme fonksiyonelini

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) + \int_0^x \lambda \left(\frac{d^m u}{dx^m} + L\widetilde{u}_n(s) + N\widetilde{u}_n(s) - f(s) \right) ds$$

biçiminde alırsak, varyasyon uygulandığında

$$\delta u_{n+1}(x) = \delta u_n(x) + \delta \int_0^x \lambda(x, s) \left(\frac{d^m u}{dx^m} \right) ds$$

olup; buradan Lagrange çarpanı

$$\frac{(-1)^m}{(m-1)!}(s-x)^{m-1},\ m \geq 1 \tag{3.6}$$

olarak bulunabilir [11]. Dikkat edilirse yukarıdaki örnekte $m = 2$ olduğundan Lagrange çarpanı $\lambda = s - x$ bulunmuştur.

4 METODUN UYGULAMALARI

Bu bölümde, varyasyonel iterasyon metodunu, bazı lineer ve nonlineer adi ve kısmi diferensiyel denklemlerin çözümlerini bulmak için nasıl kullanılacağına, örneklerle değineceğiz.

Örnek 4.1

$$\begin{cases} u'' - 6u^2 + 6 = 0 \\ u(0) = 2, \; u'(0) = 0 \end{cases}$$

sabit katsayılı nonlineer homojen olmayan başlangıç değer problemini ele alalım. Bu denkleme karşılık gelen düzeltme fonksiyoneli

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) + \int_0^t \lambda(t,s) \left\{ u_n''(s) - 6\widetilde{u}_n^2(s) + 6 \right\} ds \tag{4.1}$$

biçiminde alınırsa (3.6) eşitliğinden Lagrange çarpanı

$$\lambda(t,s) = s - t$$

olarak bulunur. Lagrange çarpanı (4.1) denkleminde yerine yazılarak iterasyon formülü,

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) + \int_0^t (s-t) \left\{ u_n''(s) - 6u_n^2(s) + 6 \right\} ds \tag{4.2}$$

olarak belirlenir. İlk yaklaşım fonksiyonu, a, b sabitler olmak üzere yine

$$u_0(t) = at + b$$

şeklinde alınabilir. İlk yaklaşım fonksiyonunun problemin başlangıç koşullarını sağlaması gerektiğinden

$$a = 0, \; b = 2$$

bulunur. O halde (4.2) iterasyon formülünden ikinci yaklaşım,

$$\begin{aligned} u_1(t) &= u_0(t) + \int_0^t (s-t) \left\{ u_0''(s) - 6u_0^2(s) + 6 \right\} ds \\ &= 2 - 18 \int_0^t (s-t) ds \\ &= 2 + 9t^2 \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Üçüncü yaklaşım fonksiyonu u_2, (4.2) iterasyon formülünde u_1 fonksiyonunun yerine yazılmasıyla

$$u_2(t) = 2 + 9t^2 + 18t^4 + \frac{81}{5}t^6$$

biçiminde elde edilir. Hesaplamalara devam edilerek

$$u_3(t) = 2 + 9t^2 + 18t^4 + \frac{153}{5}t^6 + \frac{1458}{35}t^8 + \frac{1026}{25}t^{10}$$

sonucuna ulaşılır. Bu problemin seri çözümü ise

$$u(t) = 2 + 9t^2 + 18t^4 + \frac{153}{5}t^6 + \frac{1674}{35}t^8 + \frac{12438}{175}t^{10} + \mathcal{O}(t^{12})$$

biçimindedir. Metodu uygulamaya devam ettikçe elde edilen sonuçlar analitik çözüme yakınsayacaktır.

Metodun başarısı Lagrange çarpanının seçimiyle alakalı olduğundan, her problem için (3.6) eşitliğini kullanmak doğru olmayabilir. Örneğin;

$$u''(t) + \frac{2}{t}u'(t) + f(t,u) = g(t)$$

genel Lane-Emden denklemi için düzeltme fonksiyonelini

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) + \int_0^t \lambda(s)\left[u_n''(s) + \frac{2}{s}u_n'(s) + \widetilde{f}(s,u_n) - \widetilde{g}(s)\right] ds$$

biçiminde alır ve varyasyon uygularsak

$$\delta u_{n+1}(t) = \delta u_n(t) + \delta \int_0^t \lambda(s)\left[u_n''(s) + \frac{2}{s}u_n'(s)\right] ds$$

elde ederiz ki bu,

$$\begin{aligned}\delta u_{n+1}(t) = {} & \left[1 - \lambda'(t) + \frac{2}{t}\lambda(t)\right]\delta u_n(t) + \delta\lambda(t)u_n'(t) \\ & + \int_0^t \delta u_n\left[\lambda''(s) - 2\frac{s\lambda'(s) - \lambda(s)}{s^2}\right] ds\end{aligned}$$

olup buradan Euler-Lagrange denklemi ve yan koşulları

$$\lambda''(t) - 2\frac{t\lambda'(t) - \lambda(t)}{t^2} = 0$$
$$\lambda(t) = 0, \quad 1 - \lambda'(t) + \frac{2}{t}\lambda(t) = 0$$

olarak bulunur. Böylece Lagrange çarpanı,

$$\lambda(s) = \frac{s^2}{t} - s$$

biçiminde hesaplanır.

Aşağıdaki iki örnek bu Lagrange çarpanını kullanarak yaklaşık çözümü hesaplama üzerinedir.

Örnek 4.2

$$\begin{cases} u'' + \frac{2}{t}u' - \left(4t^2 + 6\right) u = 0 \\ u(0) = 1, u'(0) = 0 \end{cases}$$

değişken katsayılı lineer homojen başlangıç değer problemini ele alalım. Bu denkleme karşılık gelen düzeltme fonksiyoneli;

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) + \int_0^t \lambda(t,s) \left\{ u_n''(s) + \frac{2}{t}u_n'(s) - (4t^2+6)\widetilde{u}_n \right\} ds \quad (4.3)$$

biçiminde alınırsa Lagrange çarpanının

$$\lambda(t,s) = \frac{s^2}{t} - s$$

olduğunu daha önce hesaplamıştık. Lagrange çarpanı (4.3) denkleminde yerine yazılarak, iterasyon formülü

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) + \int_0^t \left[\frac{s^2}{t} - s \right] \left[u_n''(s) + \frac{2}{t}u_n'(s) - (4t^2+6)u_n \right] ds \quad (4.4)$$

olarak belirlenir. İlk yaklaşım fonksiyonunun, problemin başlangıç koşullarını sağlaması gerektiğinden $u_0 = 1$ olarak alabiliriz. O halde

(4.4) iterasyon formülünden ilk dört yaklaşım;

$$
\begin{aligned}
u_1 &= 1 + t^2 + \frac{t^4}{5} \\
u_2 &= 1 + t^2 + \frac{t^4}{2!} + \frac{13}{105}t^6 + \frac{1}{90}t^8 \\
u_3 &= 1 + t^2 + \frac{t^4}{2!} + \frac{t^6}{3!} + \frac{4}{105}t^8 + \frac{59}{11550}t^{10} \\
u_4 &= 1 + t^2 + \frac{t^4}{2!} + \frac{t^6}{3!} + \frac{t^8}{4!} + \frac{47}{5775}t^{10} + \ldots
\end{aligned}
$$

olarak elde edilir. Bu problemin analitik çözümü ise

$$u(t) = e^{t^2} = 1 + t^2 + \frac{t^4}{2!} + \frac{t^6}{3!} + \frac{t^8}{4!} + \frac{t^{10}}{5!} + \mathcal{O}(t^{12})$$

biçimindedir.

Örnek 4.3

$$\begin{cases} u'' + \frac{2}{t}u' + \left(8e^u + 4e^{\frac{u}{2}}\right) = 0 \\ u(0) = 0, \;\; u'(0) = 0 \end{cases}$$

denklemini, başlangıç koşuluyla birlikte göz önüne alalım. Bu denkleme karşılık gelen düzeltme fonksiyoneli;

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) + \int_0^t \lambda(t,s)\left\{u_n''(s) + \frac{2}{t}u_n'(s) + \left(8e^{\widetilde{u}_n} + 4e^{\frac{\widetilde{u}_n}{2}}\right)\right\} ds \quad (4.5)$$

biçiminde alınırsa Lagrange çarpanı yine

$$\lambda(t,s) = \frac{s^2}{t} - s$$

olarak bulunur. Lagrange çarpanı, (4.5) denkleminde yerine yazılarak iterasyon formülü,

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) + \int_0^t \left[\frac{s^2}{t} - s\right]\left[u_n''(s) + \frac{2}{t}u_n'(s) + (8e^{u_n} + 4e^{\frac{u_n}{2}})\right] ds \quad (4.6)$$

olarak belirlenir. İlk yaklaşım fonksiyonunun problemin başlangıç koşullarını sağlaması gerektiğinden $u_0 = 0$ olarak alabiliriz. O halde

(4.6) iterasyon formülünden ilk dört yaklaşım

$$\begin{aligned}
u_1 &= -2t^2 \\
u_2 &= -2t^2 + t^4 \\
u_3 &= -2t^2 + t^4 - \frac{2}{3}t^6 \\
u_4 &= -2t^2 + t^4 - \frac{2}{3}t^6 + \frac{1}{2}t^8
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Bu problemin analitik çözümü ise

$$u(t) = -2\ln(1+t^2) = -2\left(t^2 - \frac{1}{2}t^4 + \frac{1}{3}t^6 - \frac{1}{4}t^8 + \mathcal{O}(t^{10})\right)$$

biçimindedir.

Örnek 4.4

$$\begin{cases} u_t + u_{xxxx} = 0, \ x \in \mathbb{R}, \ t > 0, \\ u(x,0) = \sin(x) \end{cases}$$

denklemini, başlangıç koşuluyla birlikte göz önüne alalım. Bu denkleme karşılık gelen düzeltme fonksiyoneli;

$$u_{n+1}(x,t) = u_n(x,t) + \int_0^t \lambda\{u_t + \widetilde{u}_{xxxx}\}ds \qquad (4.7)$$

biçiminde alınırsa, Lagrange çarpanı (3.6) eşitliğinden

$$\lambda = -1$$

olarak bulunur. Lagrange çarpanı (4.7) denkleminde yerine yazılarak iterasyon formülü,

$$u_{n+1}(x,t) = u_n(x,t) - \int_0^t \{u_t + u_{xxxx}\}ds \qquad (4.8)$$

olarak belirlenir. (4.8) iterasyon formülü ve u_0 başlangıç tahmini kullanılarak ilk dört yaklaşım;

$$\begin{aligned}
u_1(x,t) &= (1-t)\sin(x) \\
u_2(x,t) &= \left(\frac{t^2}{2} - t + 1\right)\sin(x) \\
u_3(x,t) &= \left(-\frac{t^3}{6} + \frac{t^2}{2} - t + 1\right)\sin(x) \\
u_4(x,t) &= (t^4 - 4t^3 + 12t^2 - 24t + 24)\frac{\sin(x)}{24}
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Bu problemin analitik çözümü ise

$$u(x,t) = e^{-t}\sin(x) = \left(1 - t + \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{24} - \mathcal{O}(t^6)\right)\sin(x)$$

biçimindedir.

Örnek 4.5

$$\begin{cases} u_t - u_{xxt} + \left(\frac{u^2}{2}\right)_x = 0, & -\infty < x < \infty,\ t > 0, \\ u(x,0) = x \end{cases}$$

problemini göz önüne alalım. Bu denkleme karşılık gelen düzeltme fonksiyoneli;

$$u_{n+1}(x,t) = u_n(x,t) + \int_0^t \lambda\{u_t - \widetilde{u}_{xxt} + u\widetilde{u}_x\}ds \tag{4.9}$$

biçiminde alınırsa, Lagrange çarpanı (3.6) eşitliğinden

$$\lambda = -1$$

olarak bulunur. Lagrange çarpanı (4.9) denkleminde yerine yazılarak iterasyon formülü,

$$u_{n+1}(x,t) = u_n(x,t) - \int_0^t \{u_t - u_{xxt} + uu_x\}ds \tag{4.10}$$

olarak belirlenir. (4.10) iterasyon formülü ve u_0 başlangıç tahmini kullanılarak ilk beş yaklaşım;

$$\begin{aligned}
u_1(x,t) &= x(1-t) \\
u_2(x,t) &= x\left(1-t+t^2-\frac{t^3}{3}\right) \\
&\vdots \\
u_5(x,t) &= x\left(1-t+t^2-t^3+t^4-t^5+\mathcal{O}(t^6)\right)
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Bu problemin analitik çözümü ise

$$u(x,t) = \frac{x}{1+t} = x\left(1-t+t^2-t^3+t^4-t^5+\mathcal{O}(t^6)\right)$$

biçimindedir.

5 LİTERATÜRDE YER ALAN ÇALIŞMALAR

Literatür tarandığında, geliştirildiği tarihten bu yana pek çok bilim insanı tarafından bu metotla ilgili yüzlerce yayın yapıldığı gözlemlenmiştir. Bu yayınlar içerisinden seçilen bazı makaleler kronolojik sırayla aşağıda verilmiştir.

2000 yılında He, metodu otonom adi diferensiyel denklem sistemlerine uygulamıştır [12].

Abdou ve Soliman, 2004 yılındaki çalışmalarında metodu, Burger denklemini çözmek için kullanmışlardır [13].

Soliman 2005 yılında yaptığı çalışmada, metodu genelleştirilmiş düzenli uzun dalga denklemi için yaklaşık çözüm elde etmekte kullanmıştır [14].

Yine 2005 yılında Abdou ve Soliman, birleşik Schrodinger-KdV, genelleştirilmiş KdV ve sığ su denklemleri gibi lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlerin üç tipini çözmek için metodu uygulamışlardır [15].

2006 yılında Momani, sınır değer problemlerinin bir sınıfı için bu metodu kullanmıştır [16].

Momani, 2006 yılında yapmış olduğu bir diğer çalışmasında, Helmholtz kısmi diferensiyel denklemini çözmek için bu metodu uygulamıştır [17].

Abassy, 2007 yılında yayınlanan makalesinde, doğrusal olmayan denklemlerin kapalı şekildeki çözümlerini elde etmek için Laplace dönüşümü ve Pade tekniğini birlikte uygulayarak varyasyonel iterasyon metodunu geliştirmiştir [18].

Batiha, 2007 yılında bu metodu Sine-Gordon denkleminin yaklaşık analitik çözümünü elde etmek amacıyla kullanmıştır [19].

Yine Batiha, 2007 yılındaki bir başka çalışmasında bu metodu, tekil davranış gösteren ısı ve dalga-benzeri denklemlerin analitik çözümlerini elde etmek için kullanmıştır [20].

Biazar, 2007 yılında yayınladığı makalesinde, metodu değişken katsayılı dördüncü mertebeden parabolik kısmi diferensiyel denklemlere uygulamıştır [21].

He'nin 2007 yılındaki çalışması, varyasyonel iterasyon metodunun konseptlerine sade bir giriş niteliğindedir. İlk olarak Lagrange çarpanını, sınırlandırılmış varyasyonu, düzeltme fonksiyoneli gibi varyasyonel iterasyon metodundaki ana konseptleri sezgisel olarak açıklamıştır [22].

Öziş, 2007 yılında yapmış olduğu çalışmasında, bir $u^{\frac{1}{3}}$ kuvvetindeki osilatörlerin periyodik çözümlerini belirlemek için metodu kullanmıştır [23].

2007 yılında Sweilam, lineer olmayan kübik Schrödinger denklemini çözmek için bu metottan yararlanmıştır [24].

Tari, 2007 yılında düzeltme fonksiyoneline bazı bilinmeyen parametreler ekleyerek yeni bir modifiye edilmiş varyasyonel iterasyon metodu sunmuştur [25].

Tatari 2007 yılında yayınlanan makalesinde, bu metodu ikinci mertebeden başlangıç değer problemlerini çözmede kullanmıştır [26].

Wang, 2007 yılında integro-diferensiyel denklemleri çözmek için metottan yararlanmıştır [27].

2007 yılında Wazwaz, metodu üçüncü mertebeden nonlineer Blasius denkleminin iki şekline uygulamıştır [28].

Wazwaz 2007 yılında yaptığı bir diğer çalışmada, varyasyonel iterasyon metodunu lineer ve nonlineer kısmi diferensiyel denklem sistemlerinin çözümünde bu metoda yer vermiştir [29].

Yine Wazwaz, aynı yıl Dirichlet ve Neumann sınır koşullarına sahip Laplace denkleminin analitik uygulaması için bu metoda başvurmuştur [30].

Wazwaz'ın 2008 yılı çalışması, metodu kullanarak lineer ve nonlineer Schrödinger denklemlerinin tam çözümlerini elde etmek üzerinedir [32].

Dehghan 2008 yılında, Cauchy reaksiyon-difüzyon probleminin çözümünü bu metodu kullanarak göstermiştir [33].

2008 yılında Inc, $K(m, p, 1)$ türü nonlineer, ayrık denklemlerin çözümünü yaklaşık olarak hesaplamak için metodu uygulamıştır [34].

Odibat, 2008 yılı çalışmasında nonlineer ayrık denklemlerin çözümlerini oluşturmak için bu metodu kullanmıştır [35].

Ali, 2009 yılında yayınladığı çalışmasında varyasyonel iterasyon metodunu kullanarak değişken katsayılı, farklı boyutlardaki kısmi diferensiyel denklemlerin tam çözümlerini vermiştir [36].

2009 yılında Altıntan, metodu lineer Sturm-Liouville özdeğerine ve sınır değer problemlerine uygulamıştır [37].

2009 yılında Geng, Riccati diferensiyel denklemleri için modifiye edilmiş bir varyasyonel iterasyon metodu sunmuştur [38].

Aynı yıl Ghorbani, varyasyonel iterasyon metodunun başka bir modifikasyonunu sunmuştuır [39].

2009 yılında Petkoviç, bu metodun aslında 1870'de Schröder'in verdiği metot ile aynı olduğunu göstermiştir [40].

2009 yılında yapmış olduğu bir çalışmada Yıldırım, Lane-Emden türü tekil başlangıç değer problemlerinin bir sınıfının yaklaşık-tam çözümlerini metodu kullanarak sunmuştur [41].

Yine Biazar, 2010 yılı çalışmasında lineer ve nonlineer Fokker-

Planck denklemlerinin çözümlerini elde etmek için varyasyonel iterasyon metodunu kullanmıştır [42].

Ghaorbani, 2010 yılında yayınladığı bir makalesinde Riccati denklemlerinin çözümlerine ulaşmak için metottan yararlanmıştır [43].

Yine 2010 yılında Odibat, metodun yakınsaklığı üzerine bir çalışma gerçekleştirmiştir [12].

Soltani, 2010 yılı çalışmasında, Lagrange çarpanının etkili bir şekilde bulunabilmesi için lineer operatörleri seçmede çok büyük ölçüde serbestlik tanıyan yeni bir varyasyonel iterasyon algoritması sunmuştur [44].

6 SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezin konusu olan varyasyonel iterasyon metodu ile ilgili literatürde yer alan çalışmalar incelendiğinde, aşağıdaki sonuçlara ulaşılmıştır:

- Metodun, problemin fiziksel davranışlarını değiştirecek herhangi bir kısıtlayıcı varsayım ya da dönüşüm uygulamadığı tespit edilmiştir.
- Metodun yaklaşık çözümü, hızlı yakınsayan iterasyonlar ile hesaplamaya olanak sağladığı görülmüştür.
- Metodun diğer yaklaşım yöntemlerine nazaran, daha az hesaplama gerektirdiği tespit edilmiştir.
- Metod, analitik çözümü olmayan problemlerde, sadece birkaç iterasyon sonucu yaklaşık çözüme yakınsayabilmektedir.
- Nonlineerliği kuvvetli olan problemlerin yaklaşık çözümleri için daha fazla sayıda iterasyon gerektiği belirlenmiştir.

Elde edilen sonuçlar ışığında metodun, her türden lineer ya da nonlineer probleme uygulanabileceği söylenebilir. Çözümlerin yakınsaması, başlangıç yaklaşımının ve Lagrange çarpanının iyi tespit edilmesiyle alakalıdır. Metodun literartürde yer alan birkaç modifikasyonu mevcuttur. Ancak metodun yakınsama hızını arttıracak daha iyi modifikasyonları geliştirilebilir.

KAYNAKLAR

[1] van Brunt, B. *The calculus of variations*, Springer-Verlag, New York, 2004.

[2] Dacorogna, B. *Introduction to the calculus of variations: 2nd Edition*, Imperial Collage Press, London, 2004.

[3] Inokuti, M.; Sekine, H.; Mura, T. *General use of the Lagrange multiplier in nonlinear mathematical physics*, Variational Method in the Mechanics of Solids, Pergamon Press, New York, **1978**, 159-162.

[4] He, J. H. *A new approach to nonlinear partial differential equations*, Comm. Nonlinear Sci. Numer. Simul., 2 (4) **1997**, 230-235.

[5] He, J. H. *Variational iteration method for delay differential equations*, Comm. Nonlinear Sci. Numer. Simul., 2 (4) **1997**, 235-236.

[6] He, J. H. *A variational iteration method for nonlinearity and its applications* (in Chinese), Mech. Practice, 20 (1) **1998**, 30-32.

[7] He, J. H. *Variational iteration approach to 2.spring system*, Mech. Sci. Tech., 17 (2) **1998**, 221-223.

[8] He, J. H. *Approximate analytical solution for seepage flow with fractional derivatives in porous media*, Comput. Methods Appl. Mech. Eng., 167 (1-2) **1998**, 57-68.

[9] He, J. H. *Approximate solution of nonlinear differential equations with convolution product nonlinearities*, Comput. Methods Appl. Mech. Eng., 167 (1-2) **1998**, 69-73.

[10] He, J. H. *Variational iteration method-a kind of non-linear analytical technique: some examples*, Internat. J. Nonlinear Mech., 34 (4) **1999**, 699-708.

[11] Odibat, Z. M. *A study on the convergence of variational iteration method*, Math. Comput. Model., 51 **2010**, 1181-1192.

[12] He, J. H. *Variational iteration method for autonomous ordinary differential systems*, Appl. Math. Comput., 114 (2-3) **2000**, 115-123.

[13] Abdou, M. A.; Soliman, A. A. *Variational iteration method for solving Burger's and coupled Burger's equations*, J. Comput. Appl. Math., 181 (2) **2005**, 245-251.

[14] Soliman, A. A. *Numerical simulation of the generalized regularized long wave equation by He's variational iteration method*, Math. Comput. Simul., 70 (2) **2005**, 119-124.

[15] Abdou, M. A.; Soliman, A. A. *New applications of variational iteration method*, Physica D, 211 **2005**, 1-8.

[16] Momani, S.; Abuasad, S.; Odibat, Z. *Variational iteration method for solving nonlinear boundary value problems*, Appl. Math. Comput., 183 **2006**, 1351-1358.

[17] Momani, S.; Abuasad, S. *Application of He's variational iteration method to Helmholtz equation*, Chaos, Solitons and Fractals, 27 **2006**, 1119-1123.

[18] Abassy, T. A.; El-Tawil, M. A.; El-Zoheiry, H. *Exact solutions of some nonlinear partial differential equations using the variational iteration method linked with Laplace transforms and the Pade technique*, Comput. Math. Appl., 54 **2007**, 940-954.

[19] Batiha, B.; Noorani, M. S. M.; Hashim, I. *Numerical solution of Sine-Gordon equation by variational iteration method*, Physics Letters A, 370 **2007**, 437-440.

[20] Batiha, B.; Noorani, M. S. M.; Hashim, I. *Application of variational iteration method to heat and wave-like equations*, Physics Letters A, 369 **2007**, 55-61.

[21] Biazar, J.; Ghazvini, H. *He's variational iteration method for fourth-order parabolic equations*, Comput. Math. Appl., 54 **2007**, 1047-1054.

[22] He, J. H. *Variational iteration method - Some recent results and new interpretations*, J. Comput. Appl. Math., 207 **2007**, 3-17.

[23] Öziş, T.; Yıldırım, A. *A study of nonlinear oscillators with force by He's variational iteration method*, Journal of Sound and Vibration, 306 **2007**, 372-376.

[24] Sweilam, N. H. *Variational iteration method for solving cubic nonlinear Schrödinger equation*, J. Comput. Appl. Math., 207 **2007**, 155-163.

[25] Tari, H. *Modified variational iteration method*, Physics Letters A, 369 **2007**, 290-293.

[26] Tatari, M.; Dehghan, M. *Solution of problems in calculus of variations via He's variational iteration method*, Physics Letters A, 362 **2007**, 401-406.

[27] Wang, S. Q.; He, J. H. *Variational iteration method for solving integro-differential equations*, Physics Letters A, 367 **2007**, 188-191.

[28] Wazwaz, A. M. *The variational iteration method for solving two forms of Blasius equation on a half-infinite domain*, Appl. Math. Comput., 188 **2007**, 485-491.

[29] Wazwaz, A. M. *The variational iteration method for solving linear and nonlinear systems of PDEs*, Comput. Math. Appl., 54 **2007**, 895-902.

[30] Wazwaz, A. M. *The variational iteration method for exact solutions of Laplace equation*, Physics Letters A, 363 **2007**, 260-262.

[31] Xu, L. *Variational iteration method for solving integral equations*, Comput. Math. Appl., 54 **2007**, 1071-1078.

[32] Wazwaz, A. M. *A study on linear and nonlinear Schrodinger equations by the variational iteration method*, Chaos, Solitons and Fractals, 37 **2008**, 1136-1142.

[33] Dehghan, M.; Shakeri, F. *Application of He's variational iteration method for solving the Cauchy reaction-diffusion problem*, J. Comput. Appl. Math., 214 **2008**, 435-446.

[34] Inc, M. *Exact special solutions to the nonlinear dispersive $K(2,2,1)$ and $K(3,3,1)$ equations by He's variational iteration method*, Nonlinear Analysis, 69 **2008**, 624-631.

[35] Odibat, Z. M. *Construction of solitary solutions for nonlinear dispersive equations by variational iteration method*, Physics Letters A, 372 **2008**, 4045-4052.

[36] Ali, A. H. A.; Raslan, K. R. *Variational iteration method for solving partial differential equations with variable coefficients*, Chaos, Solitons and Fractals, 40 **2009**, 1520-529.

[37] Altıntan, D.; Uğur, Ö. *Variational iteration method for Sturm-Liouville differential equations*, Comput. Math. Appl., 58 **2009**, 322-328.

[38] Geng, F.; Lin, Y.; Cui, M. *A piecewise variational iteration method for Riccati differential equations*, Comput. Math. Appl., 58 **2009**, 2518-2522.

[39] Ghorbani, A.; Saberi-Nadjafi, J. *An effective modification of He's variational iteration method*, Nonlinear Analysis: Real World Applications, 10 **2009**, 2828-2833.

[40] Petkoviç, M. S. *A remark on He's variational iteration technique for solving nonlinear equations*, J. Comput. Appl. Math., 233 **2009**, 1187-1189.

[41] Yıldırım, A.; Öziş, T. *Solutions of singular IVPs of Lane-Emden type by the variational iteration method*, Nonlinear Analysis, 70 **2009**, 2480-2484.

[42] Biazar, J.; Gholamin, P.; Hosseini, K. *Variational iteration method for solving Fokker-Planck equation*, J. Franklin Institute, 347 **2010**, 1137-1147.

[43] Ghorbani, A.; Momani, S. *An effective variational iteration algorithm for solving Riccati differential equations*, Appl. Math. Let., 23 **2010**, 922-927.

[44] Soltani, L. A.; Shirzadi, A. *A new modification of the variational iteration method*, Comput. Math. Appl., 59 **2010**, 2528-2535.

ÖZGEÇMİŞ

24 Kasım 1979 yılında doğdu. İlkokulu Kırşehir Cumhuriyet İlköğretim okulunda, ortaokul ve liseyi Hacı Fatma Erdemir Anadolu Lisesinde okudu. 1998 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği Bölümünü kazandı. 2003 yılında aynı bölümden mezun oldu. 2003-2008 yılları arasında özel eğitim kurumlarında çalıştı. 2008 yılından bu yana Ahi Evran Üniversitesi Mucur Meslek Yüksekokulunda öğretim görevlisi olarak çalışmaktadır. Evli ve iki çoçuk annesidir.