T.C.
AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GRAPHIN LAPLACIAN SPEKTRAL YARIÇAPI İÇİN SINIRLAR

Soner SEZGİN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

KIRŞEHİR
Nisan - 2012

T.C.
AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GRAPHIN LAPLACIAN SPEKTRAL YARIÇAPI İÇİN SINIRLAR

Soner SEZGİN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

DANIŞMAN:
Yrd. Doç. Dr. Şerife BÜYÜKKÖSE

KIRŞEHİR
Nisan - 2012

ÖZET

$G = (V, E)$ bir graph olmak üzere,

$$L(G) = \begin{cases} d(v_i) & ; \ i = j \ ise \\ -1 & ; \ i \neq j \ ve \ v_i \sim v_j \ ise \\ 0 & ; \ di\breve{g}er \ durumlarda \end{cases}$$

biçiminde tanımlı *L(G)* matrisine graphın Laplacian matrisi denir. Bir graphın Laplacian matrisinin en büyük özdeğerine Laplacian spectral yarıçap denir.

Bu çalışmada bir G graphının Laplacian matrisinin özdeğerleri için matris normları yardımıyla alt ve üst sınırlar bulunmaya çalışılacaktır.

Anahtar Kelimeler: Graph, Laplacian matris, Laplacian spektral yarıçap, Hadamard çarpım, matris normu

ABSTRACT

Let $G = (V, E)$ be a graph. The $L(G)$ matrix is defined

$$L(G) = \begin{cases} d(v_i) & ; \ if \ i = j \\ -1 & ; \ if \ i \neq j \ and \ v_i \sim v_j \\ 0 & ; \ if \ \ otherwise \end{cases}$$

The largest eigenvalue of Laplacian matrix is called Laplacian spectral radius.

In this study, we found bounds for eigenvalues of Laplacian spectral radius using matrix norms.

Keywords: Graph, Laplacian matrix, Laplacian spectral radius, Hadamard product, matrix norms.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans öğrenimim boyunca olduğu gibi tez çalışmalarımın da her aşamasında her türlü desteğini ve emeğini esirgemeyen; değerli zamanını bana ayırarak engin bilgisinden ve hoşgörüsünden istifade ettiğim, sonsuz anlayış ve ilgiyle tezimin ortaya çıkmasına yardımcı olan saygıdeğer hocam Yrd. Doç. Dr. Şerife BÜYÜKKÖSE'ye ve Ahi Evran Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü hocalarına minnettarlığımı sunarım.

Yüksek lisans öğrenimim boyunca desteğini eksik etmeyen çok değerli eşim Hava SEZGİN'e çocuklarım Emine İrem SEZGİN ve Elif Ceren SEZGİN'e de teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

ŞEKİLLER DİZİNİ

1 GİRİŞ

Graphların özdeğerlerinin çalışılması, matematiğin diğer alanları ile bağlantılar oluşturur. Özellikle spekral graph teorisi ve diferensiyel geometri arasında ilişki vardır. Kimyada; özdeğerler moleküllerin kararlılığı ile birleştirilebilir. Bunun yanı sıra graph, teorik olarak fizik ve quantum mekaniğinin çeşitli problemini de oraya çıkarır. Bizim amacımız bir basit graphın Laplacian matrisinin spektral yarıçapı için normlar yardımıyla sınırlar bulmak ve bulunan sınırların şimdiye kadar bulunan sınırlar ile kıyaslamasını yapmaktır.

Laplacian spektral yarıçapla ilgili bulunan pek çok sınır vardır. Fakat sınırların hiçbiri norma bağlı değildir. Bu çalışmada bulunan sınırlar; Laplacian matrisin Hadamard çarpımı şeklinde yazılması ve normlardan yararlanılması açısından önem arzetmektedir.

2 ÖN BİLGİLER

2.1 GRAPH KAVRAMI

Tanım 2.1 V, noktalar kümesi ve E, kenarlar kümesi olmak üzere $G = (V, E)$ yapısına ***graph*** denir.

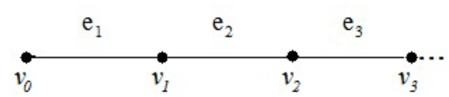
Bir graphta bir v noktasından çıkan kenar sayısına ***v noktasının derecesi*** denir ve $d(v)$ ile gösterilir.

2.1.1 Yollar ve Bağlantılılık

G deki bir yürüme(walk) W ile gösterilir.

$$W = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \ldots e_k v_k$$

sonlu sayıda elemanları noktalar ve kenarlar olan bir dizidir. Burada e_i kenarı, v_{i-1} ile v_i noktalarını birleştiren kenardır.



Bu yürümeyi kısaca

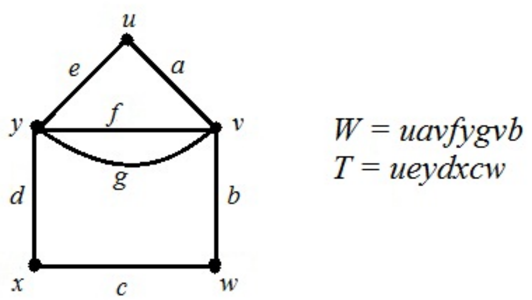
$$W = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \ldots e_k v_k = (v_0, v_k)$$

şeklinde gösterebiliriz. v_0'a başlangıç noktası, v_k'ya bitiş noktası ve diğer noktalara da iç noktalar denir. W yürümesine k uzunluğunda bir yürüme de denir.

Eğer $W = v_0 e_1 v_1 \ldots e_k v_k$ ve $W' = v_k e_{k+1} v_{k+1} \ldots e_l v_l$ birer yürüme (walk) ise $v_k e_k \ldots e_1 v_0$ yürümesi W 'nin ters çevrilmesiyle elde edilen bir yürümedir ve W^{-1} ile gösterilir. $v_0e_1v_1\dots e_lv_l$ yürümesi W ile W' nün v_k da bağlanması ile elde edilir ve WW' ile gösterilir.

$j < k$ olmak üzere $v_0e_1v_1\dots e_jv_j$ yürümesine W 'nin bir alt yürümesi denir ve bazen $i < j < k$ olmak üzere $v_ie_{i+1}v_{i+1}\dots e_jv_j$ şeklinde olabilir. Buna da W 'nin (v_i, v_j) kısıtlanışı denir.

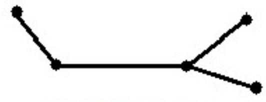
Basit bir graphta bir yürüme kenarlar atılarak sadece noktalarla gösterilir.



Eğer bir W yürüyüşünde $e_1, e_2, \dots, e_k$ farklı kenarlar ise bu yürümeye trail (patika, iz, yol) denir. Buna ek olarak W yürümesinde noktalar da farklı ise bu yürümeye path (yol) adı verilir.

G graphının u ve v noktaları arasında bir (u, v) yolu varsa u ve v noktalarına bağlantılıdır denir.

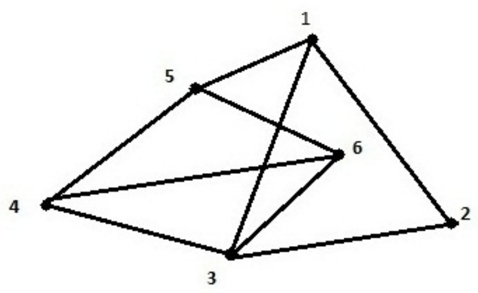
V 'nin bir boş olmayan alt kümelerini $V_1, V_2, \dots, V_w$ parçalanışı vardır ki; u ile v gibi iki noktanın bağlantılı olması için gerek ve yeter şart u ile v 'nin her ikisinin de aynı V_i kümesine ait olmasıdır. $G[V_1], G[V_2], \dots, G[V_w]$ alt graphları G 'nin komponentleri olarak adlandırılır. Eğer G tam olarak bir tek komponenti varsa bağlantılıdır, diğer durumda G bağlantılı değildir.



Bağlantılı graph

3 komponentli bağlantılı olmayan graph

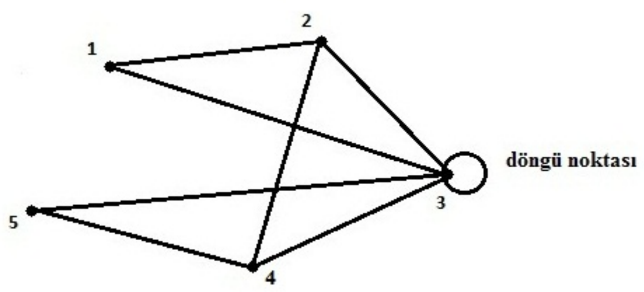
Örneğin;
V={1,2,3,4,5,6} , E={(1,2),(1,3),(1,5),(2,3),(3,1),(3,4),(3,6),(4,5),(4,6),(5,6)}
olan bir $G = (V, E)$ graphı aşağıdaki gibidir.



Şekil 2.1: Graph

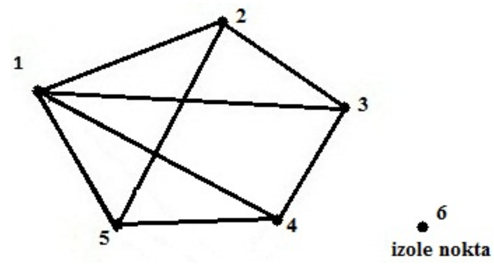
1 ve 2'yi birleştiren kenar olduğundan $1 \sim 2$ yazılabilir. 1 ile bağlantılı(komşu) kenar sayısı 3 olduğundan $d(1) = 3$ olur.

Tanım 2.2 Başlangıç ve bitiş noktaları aynı olan kenarlara ***döngü*** denir.



Şekil 2.2: Döngü noktası içeren graph

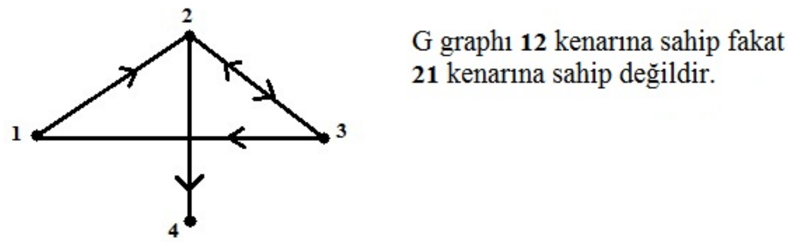
Tanım 2.3 Graphta bir başka nokta ile bağlantısı ve kenarı olmayan noktalara ***izole nokta*** denir.



Şekil 2.3: İzole nokta içeren graph

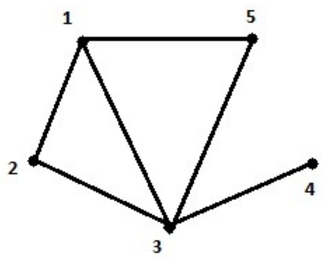
2.2 BAZI ÖZEL GRAPHLAR

Tanım 2.4 Herbir kenarı bir tek yönle belirtilen grapha **yönlü (directed) graph** denir.



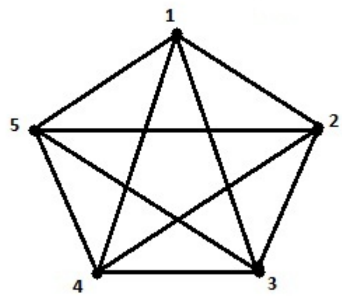
Şekil 2.4: Yönlü Graph

Tanım 2.5 Yönsüz ve döngü içermeyen graphlara ***basit graph*** denir.



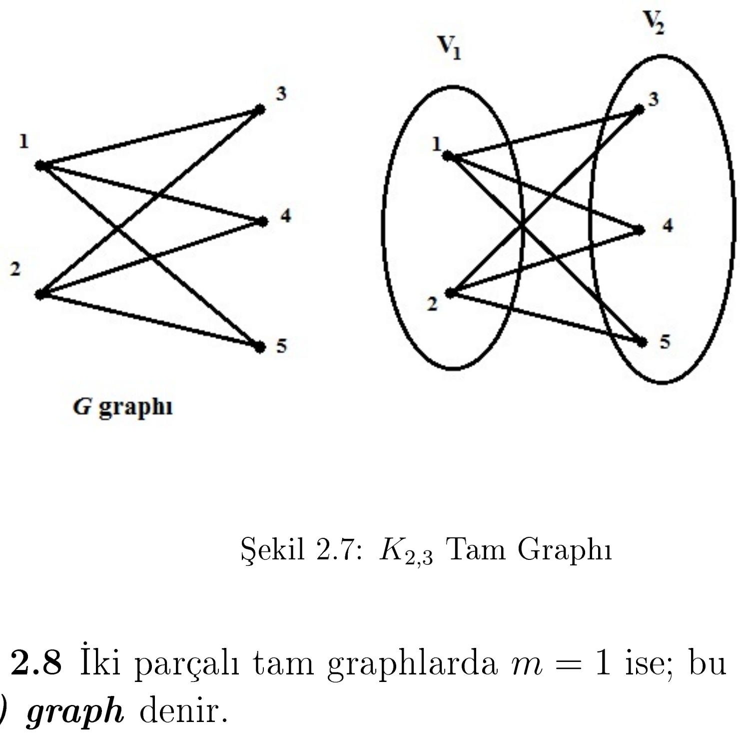
Şekil 2.5: Basit Graph

Tanım 2.6 Her noktası diğer noktalara bir kenar ile bağlı olan graphlara ***tam graph*** denir ve n noktalı bir tam graph K_n şeklinde gösterilir.



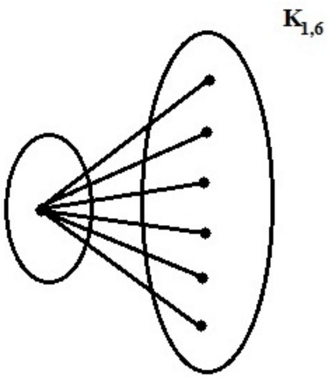
Şekil 2.6: K_5 Tam Graphı

Tanım 2.7 (İki Parçalı Tam Graph ($K_{m,n}$)): $G = (V, E)$ graphının kümesi bir kenarı birbirine bağlayan iki nokta farklı alt kümelerin elemanı olacak şekilde m ve n elemanlı V_1 ve V_2 gibi iki alt kümeye ayrılabilirse G graphına $K_{m,n}$ iki parçalı graphı denir.



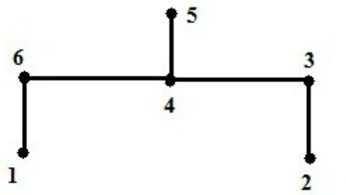
Şekil 2.7: $K_{2,3}$ Tam Graphı

Tanım 2.8 İki parçalı tam graphlarda $m = 1$ ise; bu graphlara ***star (yıldız) graph*** denir.



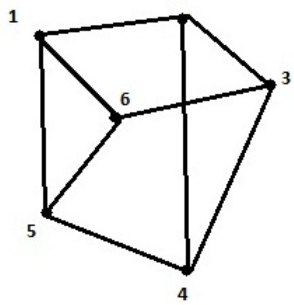
Şekil 2.8: Star(yıldız) Graph

Tanım 2.9 İki noktası arasında tek bir yol olan graphlara ***ağaç graph*** denir.



Şekil 2.9: Ağaç Graph

Tanım 2.10 Bütün noktalarının dereceleri aynı olan graphlara ***regüler (düzenli) graph*** denir.



Şekil 2.10: Regüler(düzenli) Graph

2.3 GRAPH İLE İLGİLİ BAZI MATRİSLER

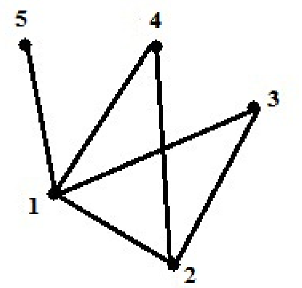
Tanım 2.11 (**Komşuluk Matrisi**) $G = (V, E)$ graphında iki noktayı bağlayan bir kenar varsa bu iki noktaya ***komşu*** denir ve $i \sim j$ ile gösterilir. Bir graphın komşuluk matrisi ise $A(G)$ ile gösterilir ve

$$A(G) = \begin{cases} 1 \ ; \ i \sim j \ \ ise \\ 0 \ ; \ di\breve{g}er \ durumlarda \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

Komşuluk matrisinde herbir satırın toplamı o noktanın derecesini verir. Ayrıca komşuluk matrisi simetriktir.

Örneğin;
$G = (V, E)$ graphı aşağıdaki gibidir.



Bu graphın komşuluk matrisi ise,

$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur.

Tanım 2.12 (**Derece Matrisi**) G graphında herbir noktanın derecelerinin,

$$D = k\ddot{o}\c{s}(d(v_1), d(v_2), \ldots, d(v_n))$$

şeklinde yazılmasıyla oluşan bir köşegen matristir.

$$D(G) = [d_{ij}] = \begin{cases} d(v_i) & ;\ i = j \ \ ise \\ 0 & ;\ di\breve{g}er\ durumlarda \end{cases}$$

Tanım 2.13 (**Laplacian Matris**) $G = (V, E)$ graphının Laplacian matrisi şöyle tanımlanır.

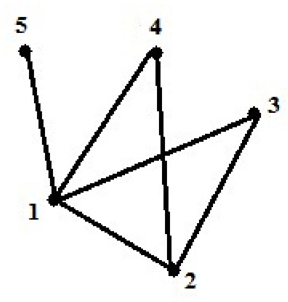
$$L(G) = \begin{cases} d(v_i) & ;\ i = j \ \ ise \\ -1 & ;\ i \neq j \ ve\ v_i \sim v_j\ ise \\ 0 & ;\ di\breve{g}er\ durumlarda \end{cases}$$

Laplacian matrisin satır ve sütun toplamı 0 'dır. Laplacian matrisi simetrik bir matristir. Laplacian matris

$$L(G) = D(G) - A(G)$$

dir.

Örneğin;
$G = (V, E)$ graphını gözönüne alalım.



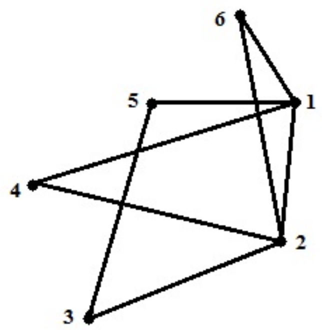
$G = (V, E)$ graphının Laplacian matrisi,

$$L(G) = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur.

Tanım 2.14 $A(G)$ komşuluk matrisinin en büyük özdeğerine ***spektral yarıçap*** denir ve $\lambda(G)$ şeklinde gösterilir.

Aşağıdaki şekilde verilen $G = (V, E)$ graphını gözönüne alalım.



Şekil 2.11: 6 noktalı graph örneği

G graphının komşuluk matrisi;

$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Özdeğerleri $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -1.7$, $\lambda_3 = -0.32$, $\lambda_4 = 0.27$, $\lambda_5 = 0.8$, $\lambda_6 = 2.9$ ve en büyük özdeğeri olan spektral yarıçapı $\lambda = \lambda_6 = 2.9$ 'dır.

Tanım 2.15 $L(G)$ Laplacian matrisin en büyük özdeğerine ***Laplacian spektral yarıçap*** denir ve $\mu(G)$ şeklinde gösterilir.

Yukarıda şekil 2.11 deki $G = (V, E)$ graphını ele alalım. Bu graphın Laplacian matrisi;

$$L(G) = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

şeklindedir.Bu matrisin özdeğerleri $\mu_1 = 0.49$, $\mu_2 = 1.26$, $\mu_3 = 2$, $\mu_4 = 2.58$, $\mu_5 = 4.73$, $\mu_6 = 5.41$ ve Laplacian spektral yarıcapı ise $\mu = \mu_6 = 5.41$ 'dır. Maple 6 'da özdeğer hesabı ayrıntılı olarak Ek A'da verilmiştir.

2.4 BAZI CEBİRSEL YAPILAR

Tanım 2.16 A boştan farklı bir küme olmak üzere $* : A \times A \longrightarrow A$ dönüşümüne A da bir ikili işlem ve üzerinde ikili işlemin tanımlandığı bu A kümesine de cebirsel yapı denir ve $(A, *)$ ile gösterilir.

Tanım 2.17 (Grup) $(G, *)$ bir cebirsel yapı olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanırsa G 'ye ($*$ işlemine göre) grup denir.

G_1) $\forall a, b \in G$ için $a * b \in G$ (Kapalılık özelliği)

G_2) $\forall a, b, c \in G$ için $a * (b * c) = (a * b) * c$ (Birleşme özelliği)

G_3) $\forall a \in G$ için $a * e = e * a = a$ olacak şekilde vardır. (Birim elemanın varlığı)

G_4) $\forall a \in G$ için $a * a' = a' * a = e$ olacak şekilde bir $a' \in G$ vardır. (Ters elemanın varlığı)

Tanım 2.18 $(G, *)$ grubundaki $*$ işlemi değişmeli ise, yani $\forall a, b \in G$ için $a * b = b * a$ oluyorsa bu gruba **değişmeli(Abel)** grup denir. Örneğin; $(\mathbf{Z}, +)$ değişmeli gruptur.

Tanım 2.19 (Halka) H boş olmayan bir küme ve H da toplama $(+)$ ve çarpma $(.)$ denilen iki tane ikili işlem tanımlanmış olsun. Eğer $(H, +, .)$ cebirsel yapısı aşağıdaki şartları sağlıyorsa bu cebirsel yapıya halka denir.

H_1) $(H, +)$ değişmeli bir gruptur.

H_2) $(H, +, .)$ daki çarpma işlemi birleşme özelliğine sahiptir. Yani $\forall a, b, c \in H$ için $a.(b.c) = (a.b).c$ dir.

H_3) $(H, +, .)$ cebirsel yapısı çarpma işlemine göre kapalıdır. Yani $\forall a, b \in H$ için $a.b \in H$ dir.

H_4) $(H, +, .)$ daki çarpma, toplama üzerinde sağdan ve soldan dağılma özelliğine sahiptir. Yani $\forall a, b, c \in H$ için $a.(b + c) = a.b + a.c$ ve $(a + b).c = a.c + b.c$ dir.

Tanım 2.20 $(H, +, .)$ halkası eğer çarpma işlemine göre birime sahip ise, yani $\forall a \in H$ için $a.1_H = 1_H.a = a$ olacak şekilde H da 1_H ile gösterilen bir eleman varsa o zaman $(H, +, .)$ halkasına **birimli** halka denir.

Tanım 2.21 $(H, +, .)$ halkası eğer çarpma işlemine göre değişmeli ise, yani $\forall a, b \in H$ için $a.b = b.a$ oluyorsa, $(H, +, .)$ halkasına **değişmeli** halka denir. Örneğin; $(\mathbf{Z}, +, .)$ birimli ve değişmeli bir halkadır.

Tanım 2.22 (Cisim) Birimli ve değişmeli bir halkanın sıfırdan farklı her elemanının tersi mevcutsa bu halkaya cisim denir. Örneğin; $(\mathbf{R}, +, .)$ cisimdir.

2.5 MATRİS NORMU

F bir cisim ve $a_{ij} \in F$ olmak üzere $A = (a_{ij})_{m\times n}$ matrisinin normu matrisin elemanlarının mutlak değerleri alınarak çeşitli şekillerde ifade edilebilir.

Matris normlarını aksiyomlara bağlı olarak aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz.

Tanım 2.23 [13] $M_n(F)$ $n \times n$ matrislerinin kümesini göstermek üzere,

$$M_N : M_n(F) \to \mathbf{R}^+$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm aşağıdaki şartları sağlarsa o zaman bu dönüşüme **matris normu** denir ve normu $A \in M_n(F)$ için $M_N(A) = \|A\|$ şeklinde gösterilir.

i) $A \in M_n(F)$ için $A \neq 0$ ise $\|A\| > 0$ ve $A = 0 \Leftrightarrow \|A\| = 0$ dır.

ii) $A \in M_n(F)$ ve $\alpha \in F$ için $\|\alpha A\| = |\alpha|\|A\|$ dır.

iii) $A, B \in M_n(F)$ için $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ dır.

iv) $A, B \in M_n(F)$ için $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$ dır.

Eğer sadece i, ii ve iii aksiyomları sağlanırsa, o zaman bu norma genelleştirilmiş matris normu denir. Eğer i, ii iii ve iv aksiyomlarının hepsi birden sağlanırsa buna da matris normu denir. Bu tanım aynı zamanda $m \times n$ dikdörtgen matrisler için de geçerlidir.

2.5.1 Bazı Özel Normlar

$A = [a_{ij}]$; $m \times n$ tipinde bir matris olmak üzere A matrisinin bazı normları şöyle tanımlanabilir.

$\boldsymbol{\ell_p}$ **normu**:

$$\|A\|_p = \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^p \right)^{\frac{1}{p}} \ , (1 \leq p < \infty) \tag{2.1}$$

$p = \infty$ alınırsa,

$$\|A\|_\infty = \lim_{n \to \infty} \|A\|_n = \max_{i,j} |a_{ij}| \tag{2.2}$$

Frobenius(Euclide Normu):

$$\|A\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.3}$$

Spektral norm:

$$\|A\|_S = \sqrt{\max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|} \tag{2.4}$$

dır. Burada λ_i, $A^H A$ matrisinin özdeğerleridir, A^H ise A 'nın eşlenik transpoze matrisidir. L Laplacian matrisi reel simetrik olduğundan $||A||_L = \max |\lambda|$ dır.

Satır uzunluk normu:

$$r_1(A) = \max_i \sqrt{\sum_j |a_{ij}|^2} \tag{2.5}$$

Sütun uzunluk normu:

$$c_1(A) = \max_j \sqrt{\sum_i |a_{ij}|^2} \tag{2.6}$$

dır.

Normlar arasındaki bağıntıyı

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_2 \leq \|A\|_S \leq \|A\|_2 \tag{2.7}$$

şeklinde ifade edebiliriz.

2.6 HADAMARD ÇARPIMI

Tanım 2.24 [8] $A = [a_{ij}]$ ve $B = [b_{ij}]$, $m \times n$ tipinde iki matris olmak üzere bu matrislerin Hadamard çarpımları $A \circ B$ şeklinde gösterilir ve

$$A \circ B = (a_{ij} b_{ij})_{m \times n} \tag{2.8}$$

şeklinde ifade edilir.

Örnek:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 5 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

matrislerinin Hadamard çarpımı

$$A \circ B = \begin{bmatrix} 6 & 12 & 1 \\ 20 & 0 & 4 \\ 15 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur.

Hadamard çarpımına genellikle Schur çarpımı da denir ve bu çarpım değişmelidir. Hadamard çarpımı daha ziyade matris teoride pozitif yarı definit matrisler için kullanılır. Yine pozitif yarı definit matrisler ve negatif olmayan reel sayılar arasındaki bir benzerliği ortaya koyar.

2.7 MATRİS ÖZDEĞERİ

Bazı şartlar altında A bir $n \times n$ kare matris ve $x \neq 0$ bir $n \times 1$ sütun vektörü olmak üzere, eğer Ax çarpımı λx şeklinde (λ, herhangi bir skaler) yazılabilirse, o taktirde cebirde dikkate değer bir basitlik söz konusu olacaktır. Buna göre $A = (a_{ij})_{n\times n}$ matrisi ile x, $n \times 1$ vektörünün çarpımı sonucunda elde edilen vektörün orjinal vektöre paralel olduğunu kabul edelim. Yani

$$Ax = \lambda x$$

olsun. $Ax = \lambda x$ denklemini I, $n \times n$ birim matris olmak üzere

$$(A - \lambda I)x = 0$$

şeklinde yazılabilir. Halbuki $(A - \lambda I)x = 0$ denklemi n bilinmeyenli, n denklemden ibaret bir homojen lineer denklem sistemidir. Diğer taraftan bir homojen lineer denklem sisteminin aşikar olmayan çözümünün olması için katsayılar matrisinin tekil olması gerekir. Bundan dolayı $(A - \lambda I)x = 0$ denklem sisteminin aşikar olmayan çözümü

$$\det(A - \lambda I) = |A - \lambda I| = 0$$

olması halinde mevcuttur. $\det(A - \lambda I) = |A - \lambda I| = 0$ ifadesini aşağıdaki gibi açık şekilde yazabiliriz:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$\det(A - \lambda I)$ 'nın hesaplanması sonucunda λ 'ya bağlı n-inci dereceden monik bir polinom elde edilir. Bu polinoma A matrisinin karakteristik polinomu denir ve $K_A(\lambda)$ şeklinde gösterilir. Yani,

$$K_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

dır. Ayrıca $K_A(\lambda) = 0$ denklemine de A matrisinin *karakteristik denklemi* denir. Bu karakteristik denklemin köklerine A matrisinin *özdeğerleri* (ya da karakteristik değerleri) denir. Hemen hatırlatalım ki; $K_A(\lambda) = 0$ n-inci dereceden bir denklem olduğundan cebirin esas teoreminden tam olarak n tane köke sahiptir. Bu köklerin hepsinin farklı olması gerekmez.

3 GRAPHIN SPEKTAL YARIÇAPI İLE İLGİLİ BAZI SINIRLAR

$G = (V, E)$ graphında m kenar, n nokta, δ minimum derece, Δ maksimum derece olmak üzere; aşağıdaki ifadeler geçerlidir.

Lemma 3.1 [16] G; n noktalı m kenarlı graph olsun. Bu takdirde,

$$\mu(G) \leq \frac{-1}{2} + \sqrt{2m + \frac{1}{4}} \tag{3.1}$$

dır ve eşitliğin olması için ancak ve ancak G 'nin bir komponentinde herbir nokta ya δ dereceli ya da bütün diğer noktalara komşu olacak ve bütün diğer komponentleri δ dereceli regüler olmasıdır.

Lemma 3.2 [16] G; n noktalı m kenarlı bağlantılı bir graph olsun. Eğer G 'nin izole noktası yoksa o zaman,

$$\mu(G) \leq \sqrt{2m - n + 1} \tag{3.2}$$

dir. Burada eşitliğin olması için ancak ve ancak G 'nin bir komponentinin m kenarlı bir tam graph olması ve diğer bütün komponentlerinin izole noktalar olmasıdır.

Teorem 3.3 [16] G graphının noktalarının derece dizisi sırasıyla $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ 'dir ve $\Delta = d_1 \geq d_2 \geq \ldots \geq d_n = \delta \geq 1$ şeklindedir. Bu takdirde,

$$\mu(G) \leq d_n + \frac{1}{2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} d_i(d_i - d_n) + \left(d_n - \frac{1}{2}\right)^2} \tag{3.3}$$

dir. Eşitlik; ancak ve ancak G 'nin en az iki parçalı komponente sahip bir regüler graph olması ya da bir star graph ve (mümkünse) K_2'lerin ayrık birleşimi olması durumunda mümkündür.

Teorem 3.4 [10] G; n noktalı m kenarlı basit bir graph olsun. G 'nin minimum ve maksimum dereceleri, sırasıyla, δ ve Δ olsun. G 'nin Laplacian matrisinin en büyük özdeğeri $\mu(G)$ olmak üzere,

$$\mu(G) \leq \frac{(\Delta+\delta-1)+\sqrt{(\Delta+\delta-1)^2+4(4m-2\delta(n-1))}}{2} \tag{3.4}$$

dır. Ayrıca eğer G bağlantılı ise o halde eşitliğin sağlanması için ancak ve ancak G regüler ve iki parçalı graph olmalıdır.

Teorem 3.5 [11] $G=(V,E)$ bir graph ve $\mu(G)$, G 'nin Laplacian matrisinin en büyük özdeğeri olmak üzere,

$$\mu(G) \leq \sqrt{2}\max\left(d(v)^2+\sum_{u,v\in E} d(u)\right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.5}$$

dir. Ayrıca, eğer G bağlantılı ise o halde eşitliğin sağlanması için ancak ve ancak G iki parçalı ve $\forall\ v \in V$ için $d(v)^2+\sum_{u,v\in E} d(u)$ aynıdır.

Sonuç 3.6 [11] G; n noktalı m kenarlı ve izole noktası olmayan bir graph olsun. $\Delta=\Delta(G)$ ve $\delta=\delta(G)$ de sırasıyla minimum ve maksimum dereceler olmak üzere G 'nin Laplacian matrisinin en büyük özdeğeri $\mu(G)$ için bir üst sınır,

$$\mu(G) \leq [2\Delta^2+4m-2\delta(n-1)+2\Delta(\delta-1)]^{\frac{1}{2}} \tag{3.6}$$

dır. Üstelik G bağlantılı ise bu takdirde; eşitliğin olması için gerek ve yeter şart G regüler iki parçalı bir graph, özellikle G iki parçalı ise,

$$\mu(G) \geq [2\delta^2+4m-2\Delta(n-1)+2\delta(\Delta-1)]^{\frac{1}{2}} \tag{3.7}$$

dır. Üstelik G bağlantılı ise eşitlik olması için gerek ve yeter şart G 'nin regüler olmasıdır.

Teorem 3.7 [11] G; n noktalı m kenarlı ve iki parçalı bir graph $\Delta = \Delta(G)$ ve $\delta = \delta(G)$ de sırasıyla minimum ve maksimum dereceleri olmak üzere G 'nin Laplacian matrisinin en büyük özdeğeri $\mu(G)$ için bir üst sınır,

$$\mu(G) \leq \{\Delta + \delta - 1 - [(\Delta + \delta - 1)^2 + 8(2m - \Delta n + \Delta)]^{\frac{1}{2}}\}/2 \tag{3.8}$$

ve ya

$$\begin{aligned} &\{\Delta + \delta - 1 + [(\Delta + \delta - 1)^2 + 8(2m - \Delta n + \Delta)]^{\frac{1}{2}}\}/2 \\ &\leq \mu(G) \leq \{\Delta + \delta - 1 + [(\Delta + \delta - 1)^2 + 8(2m - \delta n + \delta)]^{\frac{1}{2}}\}/2 \end{aligned} \tag{3.9}$$

dir. Burada G bağlantılı ise 3.8 için kesin üst sınır ve G regüler ise 3.9 de eşitlik vardır.

Teorem 3.8 [2] G graphının noktalar kümesi $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ olmak üzere G 'nin Laplacian matrisinin en büyük özdeğeri μ için bir üst sınır,

$$\mu \leq \max\{d_i + d_j - |N_i \cap N_j| \ : \ 1 \leq i, j \leq n, \ v_i v_j \in E\} \tag{3.10}$$

dır. Burada d_i, v_i noktasının derecesini, $|N_i \cap N_j|$ de v_i ve v_j noktalarının ortak komşularının sayısını göstermektedir.

Teorem 3.9 [3] G, basit bağlantılı bir graph, μ de G 'nin Laplacian matrisinin en büyük özdeğeri olmak üzere μ için bir üst sınır,

$$\begin{aligned} \mu(G) \leq \max \Bigg\{ \Bigg(& d_u^2 + d_u + \sum_v \{d_u + d_v - |N_u \cap N_v| : uv \in E\} \\ & + \sum_v \{|N_u \cap N_v| : u \neq v, uv \notin E\} \Bigg)^{\frac{1}{2}} \ : \ u \in V \Bigg\} \end{aligned} \tag{3.11}$$

dır. G iki parçalı graph ise eşitlik mevcuttur. Burada d_u, u noktalarının derecesini, $|N_u \cap N_v|$ de u ve v noktalarının ortak komşularının sayısını göstermektedir.

Teorem 3.10 [3] $G=(V,E)$ graphının noktalar kümesi $V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ olsun. G 'nin Laplacian matrisinin en büyük özdeğeri için bir üst sınır,

$$\mu(G) \leq \max\{\sqrt{2(d_u^2+d_u m_u')} \ : \ v \in V\} \tag{3.12}$$

dir. Eşitlik olması ancak ve ancak G 'nin iki parçalı regüler graph olması ile mümkündür. Burada

$$m_u' = \frac{\sum_v \{d_v - |N_u \cap N_v| \ : \ uv \in E\}}{d_u}$$

dir. d_u, u noktalarının derecelerini, $|N_u \cap N_v|$ de u ve v noktalarının ortak komşularının sayısını göstermektedir.

Sonuç 3.11 [3] $G=(V,E)$, n noktalı e kenarlı basit bağlantılı bir graph olsun o zaman G 'nin Laplacian matrisin en büyük özdeğeri

$$\mu(G) \leq \sqrt{2d_1^2+4e-2d_n(n-1)+2d_1(d_n-1)} \tag{3.13}$$

dir. Burada eşitlik ancak ve ancak G 'nin iki parçalı regüler graph olmasıyla mümkündür yine burada d_1 maksimim derece, d_n minimum derece, e kenar sayısıdır.

Teorem 3.12 [3] $G=(V,E)$, bağlantılı bir graph olsun. Bu takdirde G 'nin Laplacian matrisinin özdeğeri için bir üst sınır,

$$\mu(G) \leq \max\left\{\frac{(d_u+d_v)+\sqrt{(d_u-d_v)^2+4m_u m_v}}{2} \ : \ uv \in E\right\} \tag{3.14}$$

dir. Eşitlik ancak ve ancak G 'nin ya iki parçalı düzenli graph ya da iki parçalı yarı düzenli graph olması durumunda mümkündür. d_u ve m_u sırasıyla u noktasının dercesini ve u 'ya komşu noktaların derecelerinin ortalamasıdır.

Teorem 3.13 [4] G en az bir kenarlı basit graph olsun. Bu durumda,

$$\mu(G) \geq \max\left\{ \left(\left(d_i^2 + 2d_i - 2d_j - 2 + \left((d_i^2 + 2d_i + 2d_j + 4)^2 \right.\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.\left. +4(d_i - c_{ij} - 1)(d_j - c_{ij} - 1)\right)^{\frac{1}{2}}\right)/2\right)^{\frac{1}{2}} \ : \ v_i v_j \in E \right\} \quad (3.15)$$

dir. Burada d_i ve d_j sırasıyla v_i ve v_j noktalarının derecelerini, c_i ise v_i ve v_j noktalarının ortak komşuluklarının sayısını göstermektedir.

4 NORMLAR YARDIMIYLA LAPLACIAN SPECTRAL YARIÇAPA SINIRLAR

Bu bölümde bir graphın Laplacian matrisini Hadamard çarpımından yararlanarak iki matrisin çarpımı şeklinde yazmaya çalışacağız. Ayrıca bu matrislerin satır ve sütun normlarından yararlanarak Laplacian spektral yarıçapı için bir sınır bulmaya çalışacağız.

Lemma 4.1 [8] Eğer $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ ve $C = [c_{ij}]$, mxn tipinde matrisler ve $C = A \circ B$ ise bu takdirde,

$$\|C\|_2 \leq r_i(A) c_i(B) \tag{4.1}$$

dir.

Lemma 4.2 [8] $A = [a_{ij}]$, mxn matris ve λ, A 'nın spektral yarıçapı ise

$$\lambda \leq \|A\|_2 \tag{4.2}$$

dır.

Teorem 4.3 $L(G)$, G graphının Laplacian matrisi ve μ Laplacian spektral yarıçap olmak üzere,

$$\mu \leq \sqrt{\frac{d_1^3}{4} + 2d_1^2 + 4d_1} \tag{4.3}$$

dır. Burada d_1 maksimum derecedir.

İspat. A ve B matrislerini;

$$A = \begin{cases} 2 & ; \ i = j \ ise \\ -1 & ; \ i \sim j \ ise \\ 0 & ; \ di\breve{g}er \ durumlarda \end{cases}$$

$$B = \begin{cases} \frac{d_i}{2} & ;\ i = j \ ise \\ 1 & ;\ i \sim j \ ise \\ 0 & ;\ di\breve{g}er \ durumlarda \end{cases}$$

şeklinde tanımlarsak $A \circ B = L$ olur. Ayrıca;

$$r_1(A) = \max_i \sqrt{\sum_j |a_{ij}|^2} = \max_i \sqrt{4 + d_i} = \sqrt{4 + d_1}$$

$$c_1(A) = \max_j \sqrt{\sum_i |a_{ij}|^2} = \max_j \sqrt{\frac{d_i^2}{4} + d_i} = \sqrt{\frac{d_1^2}{4} + d_1}$$

Ayrıca A, B ve L matrisleri G graphı, basit ve bağlantılı olduğunda simetrik matrisler olduklarından satır ve sütun normları eşittir.

$$r_1(A) = c_1(A) = \sqrt{4 + d_1}$$
$$c_1(B) = r_1(B) = \sqrt{\frac{d_1^2}{4} + d_1}$$

$L = A \circ B$ ve

$$\begin{aligned} \mu &\leq r_1(A) c_1(B) \\ &\leq \left(\sqrt{4 + d_1}\right) \left(\sqrt{\frac{d_1^2}{4} + d_1}\right) \\ &\leq \sqrt{(4 + d_1)\left(\frac{d_1^2}{4} + d_1\right)} \\ &\leq \sqrt{\frac{d_1^3}{4} + 2d_1^2 + 4d_1} \end{aligned}$$

dır. ■

Teorem 4.4 $L(G)$; G graphının Laplacian matrisi ve μ, Laplacian spektral yarıçap olmak üzere,

$$\mu \geq \sqrt{\frac{d_n^3}{4} + 2d_n + 4d_n} \tag{4.4}$$

dır. Burada d_n minimum derecedir.

İspat. A ve B matrislerini Teorem 4.3 deki şekilde seçelim.

$$r_1'(A) = \min_i \sqrt{\sum_j |a_{ij}|^2} = \min_i \sqrt{4 + d_i} = \sqrt{4 + d_n}$$

$$c_1'(B) = \min_j \sqrt{\sum_i |a_{ij}|^2} = \min_j \sqrt{\frac{d_j^2}{4} + d_j} = \sqrt{\frac{d_n^2}{4} + d^n}$$

olarak ifade edebiliriz.

$L = A \circ B$ olduğundan özdeğer ve norm arasındaki bağıntıdan

$$\mu \geq r_1'(A).c_1'(B)$$

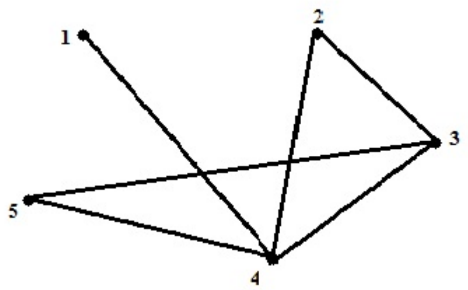
$$\mu \geq \left(\sqrt{4 + d_n}\right)\left(\sqrt{\frac{d_n^2}{4} + d_n}\right)$$

$$\mu \geq \sqrt{\frac{d_n^3}{4} + 2d_n^2 + 4d_n}$$

alt sınırlarını buluruz. ■

5 ÖRNEKLER

Örnek 5.1



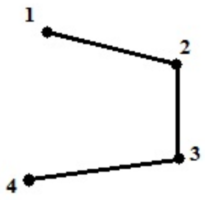
$$L(G) = A \circ B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

μ	**(3.3)**	**(3.4)**	**(3.5)**	**(3.10)**	**(3.11)**	**(3.12)**	**(3.14)**	**(4.3)**
5	6.216	6.472	6.928	5	6.708	6.324	5	8

μ	**(3.15)**	**(4.4)**
5	5	2.5

Örnek 5.2



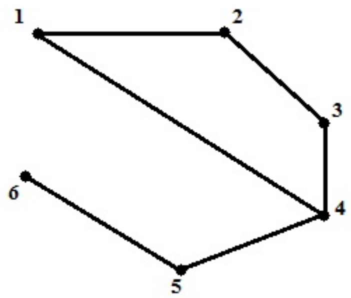
$$L(G) = A \circ B \;=\; \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

μ	**(3.3)**	**(3.4)**	**(3.5)**	**(3.10)**	**(3.11)**	**(3.12)**	**(3.14)**	**(4.3)**
3.41	3.56	3.645	3.741	4	3.872	3.741	3.5	4.242

μ	**(3.15)**	**(4.4)**
3.41	3.316	2.5

Örnek 5.3



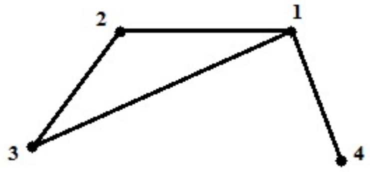
$$L(G) = A \circ B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

μ	**(3.3)**	**(3.4)**	**(3.5)**	**(3.10)**	**(3.11)**	**(3.12)**	**(3.14)**	**(4.3)**
4.56	5.274	5.531	5.291	5	5.656	5.477	4.791	6.062

μ	**(3.15)**	**(4.4)**
4.56	4	2.5

Örnek 5.4



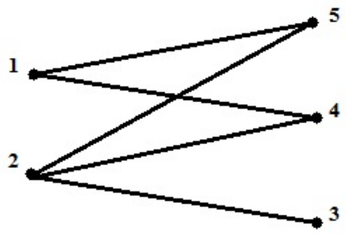
$$L(G) = A \circ B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{\mu}$	**(3.3)**	**(3.4)**	**(3.5)**	**(3.10)**	**(3.11)**	**(3.12)**	**(3.14)**	**(4.3)**
4	4.701	5	5.291	4	4.242	4.898	5.049	6.062

$\boldsymbol{\mu}$	**(3.15)**	**(4.4)**
4	4	2.5

Örnek 5.5



$$L(G) = A \circ B \;=\; \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{\mu}$	**(3.3)**	**(3.4)**	**(3.5)**	**(3.8)**	**(3.10)**	**(3.11)**	**(3.12)**	**(3.14)**	**(4.3)**
4.481	5	5.274	5.291	5.274	5	5.291	5.291	4.601	6.062

$\boldsymbol{\mu}$	**(3.15)**	**(4.4)**
4.481	4.0108	2.5

KAYNAKLAR

[1] Balakrishnan R.; Ranganathan K., *A Textbook of Graph Theory, Springer,* **2000**

[2] Das, K.C; *An improved upper bound for Laplacian graph eigenvalues, Linear Algebra and its Applications, Elsevier,* **2003**, *368*, 269-278

[3] Das, K.Ch; *A characterization on graph which achieve the upper bound for the largest Laplacian eigenvalue of graphs, Linear Algebra and its Applications, Elsevier,* **2004**, *376*, 173-186

[4] Das, K.Ch; *The largest two Laplacian eigenvalues of a graph, Linear and Multilinear Algebra,* **2004**, *52(6)*, 441-460

[5] Diestel, R.; *Graph Theory, Springer*, **2006**

[6] Gross J.L.; Yellen J., *Graph Theory and its Applications, CRC Press*, **2006**

[7] Hong,Y.; Shu, L-J, Fang, K. , *A Sharp upper bound of the spectral radius of graphs, Journal of Combinatorial Theory, Series B* **2001**, *81*, 177-183

[8] Horn,R.A.; Johnson C.R., *Matrix Analysis, Cambridge University Press,* **1985**

[9] Lin, L.; *The Laplacian spectral radius of graphs on surfaces, Linear Algebra and its Applications, Elsevier,* **2008**, *428*, 973-977

[10] Liu, H.; Lu M.; Tian F., *On the Laplacian spectral radius of graph, Linear Algebra and its Applications, Elsevier,* **2004**, *376*, 135-141

[11] Shi, L.; *Bound on the (Laplacian) spectral radius of graphs, Linear Algebra and its Applications, Elsevier,* **2007**, *422*, 755-770

[12] Shu, J-L.; Hong Y.; Wen-Ren K., *A sharp upper bound on the largest eigenvalue of the Laplacian matrix of a graph, Linear Algebra and its Applications, Elsevier,* **2002**, *347*, 123-129

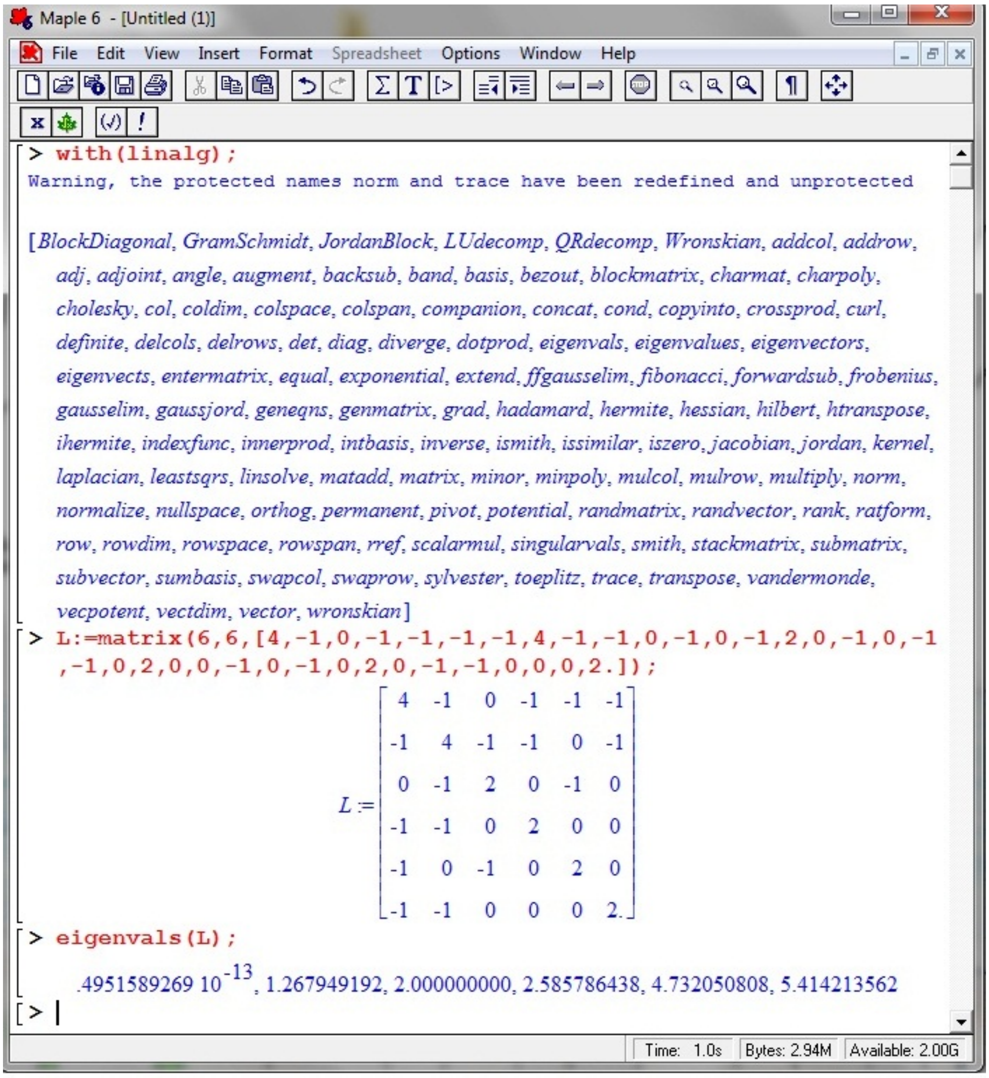
[13] Taşçı D., *Lineer Cebir*, Ankara, **2011**

[14] Tian G-X ; Huang T-Z ; Zhou B.; *A note on sum of powers of the Laplacian eigenvalues of bipartite graphs, Linear Algebra and its Applications, Elsevier,* **2009**, *430*, 2503-2510

[15] Tutte W.T.; *Graph Theory, Cambridge University Press,* **2001**

[16] Zhou B.; Cho H.H.; Guangzhou, *Remarks on Spectral Radius and Laplacian Eigenvalues of a graph, Czechoslovak Mathematical Journal,* **2005**, *55(130)*, 781-790

EK-A


Maple 6 - [Untitled (1)]
File Edit View Insert Format Spreadsheet Options Window Help
> with(linalg);
Warning, the protected names norm and trace have been redefined and unprotected
[BlockDiagonal, GramSchmidt, JordanBlock, LUdecomp, QRdecomp, Wronskian, addcol, addrow, adj, adjoint, angle, augment, backsub, band, basis, bezout, blockmatrix, charmat, charpoly, cholesky, col, coldim, colspace, colspan, companion, concat, cond, copyinto, crossprod, curl, definite, delcols, delrows, det, diag, diverge, dotprod, eigenvals, eigenvalues, eigenvectors, eigenvects, entermatrix, equal, exponential, extend, ffgausselim, fibonacci, forwardsub, frobenius, gausselim, gaussjord, geneqns, genmatrix, grad, hadamard, hermite, hessian, hilbert, htranspose, ihermite, indexfunc, innerprod, intbasis, inverse, ismith, issimilar, iszero, jacobian, jordan, kernel, laplacian, leastsqrs, linsolve, matadd, matrix, minor, minpoly, mulcol, mulrow, multiply, norm, normalize, nullspace, orthog, permanent, pivot, potential, randmatrix, randvector, rank, ratform, row, rowdim, rowspace, rowspan, rref, scalarmul, singularvals, smith, stackmatrix, submatrix, subvector, sumbasis, swapcol, swaprow, sylvester, toeplitz, trace, transpose, vandermonde, vecpotent, vectdim, vector, wronskian]
> L:=matrix(6,6,[4,-1,0,-1,-1,-1,-1,4,-1,-1,0,-1,0,-1,2,0,-1,0,-1,-1,0,2,0,0,-1,0,-1,0,2,0,-1,-1,0,0,0,2.]);
L := [[4, -1, 0, -1, -1, -1], [-1, 4, -1, -1, 0, -1], [0, -1, 2, 0, -1, 0], [-1, -1, 0, 2, 0, 0], [-1, 0, -1, 0, 2, 0], [-1, -1, 0, 0, 0, 2.]]
> eigenvals(L);
.4951589269 10^-13, 1.267949192, 2.000000000, 2.585786438, 4.732050808, 5.414213562
Time: 1.0s Bytes: 2.94M Available: 2.00G

ÖZGEÇMİŞ

06-04-1978 yılında Aksaray ili İncesu kasabasında doğdu. İlkokulu, ortaokulu ve lise tahsilini kasabasında tamamladı. 1994 yılında Erzurum Atatürk Üniversitesi Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi Matematik Bölümünü kazandı. 1998 yılında mezun olarak aynı yıl Kırşehir ili Boztepe ilçesi Gazi Osman Öztürk İlköğretim okuluna atandı. Daha sonra 2003 yılında Kırşehir Merkez 23 Nisan İlköğretim okuluna ardından 2007 yılında Sıddık Demir Anadolu lisesine tayin oldu ve halen aynı okulda çalışmaktadır. 2009 yılında Ahi Evran Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Bölümüde Yüksek lisans eğitimine başladı. Evli ve iki çocuk babasıdır.